Bollettino
Unione Matematica Italiana

Vittorio Emanuele Bononcini

Interpretazione geometrica dei segni delle derivate successive di una funzione $y = f(x)$

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.3, p. 267–269.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_3_267_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1949.

Interpretazione geometrica dei segni delle derivate successive di una funzione $y = f(x)$.

Nota di VITTORIO EMANUELE BONONCINI (a Bologna) (*).

Sunto - *I segni delle derivate successive in un punto* x_0 *indicano la maggior rapidità dello staccarsi della curva* $y = f(x)$ *dalla propria parabola osculatrice nel punto* $P_0(x_0, f(x_0))$ *a destra e a sinistra del punto* P_0.

In una sua Nota (1) il SIBIRANI ha stabilito qual'è il significato geometrico del segno della $f'''(x)$ in un punto x_0 per la curva $y = f(x)$.

(2) Considerando ad es. la cubica C, si trova che la retta proiettante da O il suo punto di flesso ha l'equazione

$$y = -3b_{30}x,$$

che porge immediatamente il significato geometrico di b_{30}. Analogamente si perviene al significato geometrico di a_{03}, partendo dalla $\overline{C}$.

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

(1) F. SIBIRANI, *Il segno di* $f'''(x)$ *caratterizza qualche proprietà geometrica per la curva* $y = f(x)$?, « Bollettino della U. M. I. », vol. X (1931), pag. 12.

In questa Nota mi propongo di completare e di estendere il risultato ottenuto dal SIBIRANI.

Sia $y = f(x)$ una funzione reale della variabile reale x definita in un intervallo (a, b) e ivi dotata di derivate fino all'ordine che interessa considerare. Nel punto $P_0(x_0, f(x_0))$, $(a < x_0 < b)$ consideriamo la parabola osculatrice di ordine n

$$y = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

Ciò premesso, dimostro la seguente proposizione:

Nel punto x_0 *risulti*

$$f^{(n+1)}(x_0) = f^{(n+2)}(x_0) = \ldots = f^{(n+r-1)}(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(n+r)}(x_0) \neq 0;$$

inoltre, considerate le derivate successive a quella di ordine $n + r$ *e di parità diversa da* $n + r$, *si abbia*

$$f^{(n+r+1)}(x_0) = f^{(n+r+3)} = \ldots = f^{(n+r+2s-1)}(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(n+r+2s+1)}(x_0) \neq 0.$$

Allora se $f^{(n+r)}(x_0)$ e $f^{(n+r+2s+1)}(x_0)$ *sono dello stesso segno la curva si stacca più rapidamente a destra che a sinistra dalla propria parabola osculatrice di ordine* n *in* P_0, *il contrario avviene se dette derivate sono di segno opposto.*

Per la dimostrazione indichiamo con y e y_n rispettivamente le ordinate corrispondenti ad una medesima ascissa della curva e della parabola osculatrice di ordine n.

Tenendo presenti le ipotesi fatte si ha manifestamente

$$y - y_n = \frac{h^{n+r}}{(n+r)!} f^{(n+r)}(x_0) + \frac{h^{n+r+2}}{(n+r+2)!} f^{(n+r+2)}(x_0) +$$

$$+ \frac{h^{n+r+4}}{(n+r+4)!} f^{(n+r+4)}(x_0) + \ldots + \frac{h^{n+r+2s+1}}{(n+r+2s+1)!} [f^{(n+r+2s+1)}(x_0) + \varepsilon(h)],$$

ossia

$$(1) \qquad y - y_n = \frac{h^{n+r}}{(n+r)!} [f^{(n+r)}(x_0) + \eta(h^2)] +$$

$$+ \frac{h^{n+r+2s+1}}{(n+r+2s+1)!} [f^{(n+r+2s+1)}(x_0) + \varepsilon(h)],$$

dove $\eta(h^2)$, $\varepsilon(h)$ sono infinitesimi con h.

I due termini a secondo membro di (1) sono infinitesimi con h; il primo è un infinitesimo di ordine inferiore al secondo.

Osserviamo inoltre che se $n + r$ è pari il primo termine è funzione pari di h, mentre se $n + r$ è dispari è funzione dispari di h.

Supposto h in valore assoluto sufficientemente piccolo esaminiamo i diversi casi che si presentano:

$a)$ $n + r$ pari, $f^{n+r}(x_0) > 0$, $f^{(n+r+2s+1)}(x_0) > 0$.

Se $h > 0$ i due termini a secondo membro di (1) sono entrambi > 0, mentre se $h < 0$ il primo termine è > 0 e l'altro è < 0. Tenendo conto che il primo termine è funzione pari di h si può concludere che la curva si stacca più rapidamente a destra che a sinistra del punto $P_0(x_0, f(x_0))$ dalla propria parabola esculatrice di ordine n.

$b)$ $n + r$ pari, $f^{(n+r)}(x_0) < 0$, $f^{(n+r+2s+1)}(x_0) < 0$.

$c)$ $n + r$ dispari, $f^{(n+r)}(x_0) > 0$, $f^{(n+r+2s+1)}(x_0) > 0$.

$d)$ $n + r$ » $f^{(n+r)}(x_0) < 0$, $f^{(n+r+2s+1)}(x_0) < 0$.

In questi tre casi si ha una conclusione analoga a quella del caso $a)$.

$e)$ $n + r$ pari, $f^{(n+r)}(x_0) > 0$, $f^{(n+r+2s+1)}(x_0) < 0$.

Se $h > 0$ i due termini a secondo membro di (1) hanno segno contrario, mentre se $h < 0$ hanno lo stesso segno (> 0).

Si può concludere, tenendo presente che il primo termine è una funzione pari di h, che la curva si stacca più rapidamente a sinistra che a destra del punto $P_0(x_0, f(x_0))$ dalla propria parabola esculatrice di ordine n.

$f)$ $n + r$ pari, $f^{(n+r)}(x_0) < 0$, $f^{(n+r+2s+1)}(x_0) > 0$.

$g)$ $n + r$ dispari, $f^{(n+r)}(x_0) > 0$, $f^{(n+r+2s+1)}(x_0) < 0$.

$h)$ $n + r$ » $f^{(n+r)}(x_0) < 0$, $f^{(n+r+2s+1)}(x_0) > 0$.

In questi tre casi valgono un ragionamento e una conclusione analoghi a quelli del caso $c)$.

La proposizione enunciata è in tal modo completamente dimostrata.

Da segnalare i seguenti casi particolari:

$a)$ Per $n = 1$, $r = 1$ risulta $f''(x_0) \neq 0$ e $f^{(3+2s)}(x_0) \neq 0$ e si ritrovano i risultati del SIBIRANI.

Per $n = 1$, $r = 2$ risulta $f''(x) = 0$, $f'''(x_0 \neq 0$, $f^{(3+2s)}(x_0) = 0$ e il [illegible]$_0(x_0, f(x_0))$ è un flesso. La proposizione dimostrata assicura che la curva si stacca più rapidamente a destra che a sinistra di P_0 dalla tangente di flesso se $f'''(x_0)$ e $f^{(4+2s)}(x_0)$ hanno lo stesso segno, più rapidamente a sinistra che a destra se sono di segno opposto. Risulta così completato anche nel caso del flesso il risultato del SIBIRANI.