Carlo Pucci

Un teorema di derivazione per serie con una applicazione alle serie trigonometriche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.3, p. 270–274.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_3_270_0>

Un teorema di derivazione per serie con una applicazione alle serie trigonometriche.

Nota di CARLO PUCCI (a Firenze) (*).

Sunto. - *Si stabilisce un teorema di derivazione per serie e si applica alle serie trigonometriche.*

In un intervallo (a, b) siano definite le funzioni $f_n(x)$, con $n = 1, 2, 3, \dots$, le quali posseggono derivate fino all'ordine $r+1$.

Se la successione $\{f_n(x)\}$ *converge in un insieme di punti ovunque denso in* (a, b), *e se le funzioni* $f_n^{(r+1)}(x)$, *con* $n = 1, 2, 3, \dots$, *sono ugualmente limitate, allora:*

I. *le successioni* $\{f_n(x)\}$, $\{f_n^{(p)}(x)\}$ *con* $p = 1, 2, \dots r$, *convergono uniformemente in* (a, b);

II. *la funzione* $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ *ha ovunque in* (a, b) *derivate determinate e finite fino all'ordine* r *e si ha* $f^{(p)}(x) = \lim_{n \to \infty} f_n^{(p)}(x)$ *per* $p = 1, 2, \dots, r$.

a) Premettiamo un risultato di Calcolo delle Differenze finite e cioè l'espressione della derivata p-esima di una funzione nella formula d'interpolazione di NEWTON col resto sotto forma di LAGRANGE.

La funzione $f(x)$ *abbia derivate determinate e finite fino all'ordine* $r+1$ *in un intervallo* (a, b) *e siano* $x_1, x_2, \dots, x_{r+1}$ $r+1$ *punti di* (a, b) *distinti due a due. Si ha allora per* $x \subset (a, b)$, *eccettuato al più un numero finito di punti,*

$$
\begin{aligned}
f^{(p)}(x) = {}& f(x_1, x_2, \dots, x_{p+1}) \frac{d^p}{dx^p}[(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_p)] + \dots + \\
(1) \qquad & + f(x_1, \dots, x_{r+1}) \frac{d^p}{dx^p}[(x - x_1) \dots (x - x_r)] + \\
& + f^{(r+1)}(\xi) \frac{d^p}{dx^p} \frac{(x - x_1) \dots (x - x_{r+1})}{(r+1)!},
\end{aligned}
$$

con $0 \leq p \leq r$, ξ *interno al maggiore fra gl'intervalli di estremi corrispondenti ai valori* $x_1, x_2, \dots, x_{r+1}, x$ *e con*

$$
\begin{aligned}
(2) \qquad f(x_1, x_2, \dots, x_i) = {}& \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_i)} + \\
& + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_i)} + \dots + \frac{f(x_i)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2) \dots (x_i - x_{i-1})}.
\end{aligned}
$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Matematico dell'Università di Firenze.

Poniamo :

$$\begin{aligned}(3)\qquad &\varphi(x) = f(x_1) + f(x_1, x_2)(x - x_1) + \dots + \\ &+ f(x_1, x_2, \dots, x_{r+1})(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_r)\end{aligned}$$

$$(4)\qquad \Phi(x) = \varphi(x) + A\,\frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{r+1})}{(r+1)!}$$

ove A è una costante che ci riserviamo di fissare in seguito. La funzione $\Phi(x)$ è continua e derivabile $r+1$ volte essendo tale il secondo membro della (4), e derivandola p volte, con $1 \leq p \leq r$, si ha:

$$\Phi^{(p)}(x) = \varphi^{(p)}(x) + A\,\frac{d^p}{dx^p}\,\frac{(x - x_1)\dots(x - x_{r+1})}{(r+1)!}.$$

Essendo

$$\Phi(x_i) = f(x_i) \qquad\qquad \text{per } 1 \leq i \leq r+1$$

annullandosi cioè in $r+1$ punti distinti di (a, b) la funzione $[f(x) - \Phi(x)]$, per il teorema di Rolle la funzione $[f'(x) - \Phi'(x)]$ si annulla in almeno r punti distinti di (a, b) e così proseguendo risulta che la funzione $[f^{(p)}(x) - \Phi^{(p)}(x)]$ si annulla in almeno $r - p + 1$ punti distinti di (a, b). Possiamo determinare la costante A in modo che per $x = x'$, dove x' è un qualsiasi punto di (a, b) distinto dagli $r - p + 1$ punti $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r-p+1}$ in cui si annulla il polinomio di grado $r - p + 1$, $\dfrac{d^p}{dx^p}\,\dfrac{(x - x_1)\dots(x - x_{r+1})}{(r+1)!}$, sia:

$$(5)\qquad \Phi^{(p)}(x') = f^{(p)}(x')$$

si avrà quindi che la funzione $[f^{(p)}(x) - \Phi^{(p)}(x)]$ si annulla in $r - p + 2$ punti distinti di (a, b) per cui la sua derivata $r - p + 1$ -esima si annullerà in un punto $\xi \subset (a, b)$

$$\left[\frac{d^{r-p+1}f^{(p)}(x)}{dx^{r-p+1}} - \frac{d^{r-p+1}\Phi^{(p)}(x)}{dx^{r-p+1}}\right]_{x=\xi} = 0$$

ovvero

$$f^{(r+1)}(\xi) = \Phi^{(r+1)}(\xi) = A$$

e quindi per la (4)

$$\Phi^{(p)}(x) = \varphi^{(p)}(x) + f^{(r+1)}(\xi)\,\frac{d^p}{dx^p}\,\frac{(x - x_1)\dots(x - x_{r+1})}{(r+1)!}$$

e per le (5) e le (3)

$$\begin{aligned}f^{(p)}(x') = {}& f(x_1, x_2, \dots, x_{p+1})\,\frac{d^p}{dx^p}[(x' - x_1)\dots(x' - x_p)] + \\ &+ f(x_1, \dots, x_{p+2})\,\frac{d^p}{dx^p}[(x' - x_1)\dots(x' - x_{p+1})] + \dots + \\ &+ f(x_1, \dots, x_{r+1})\,\frac{d^p}{dx^p}[(x' - x_1)\dots(x' - x_r)] + \\ &+ f^{(r+1)}(\xi)\,\frac{d^p}{dx^p}\,\frac{(x' - x_1)\dots(x' - x_{r+1})}{(r+1)!}\end{aligned}$$

e cambiando x in x' si ha la (1) che vale in tutto (a, b) eccettuato al più i punti $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r-p+1}$ ([2]).

b) Siano $x_1, x_2, \dots, x_{r+1}$ $r+1$ punti distinti appartenenti a a un intervallo $\Delta \subset (a, b)$ e tali che in essi sia convergente la successione $\{f_n(x)\}$. Si ha per la (1) per $x \subset (a, b)$, eccettuato al più un numero finito di punti,

$$
\begin{aligned}
f_n^{(p)}(x) - f_m^{(p)}(x) &= [f_n(x_1, \dots, x_{p+1}) - \\
&- f_m(x_1, \dots, x_{p+1})] \frac{d^p}{dx^p}[(x-x_1)\dots(x-x_p)] + \dots + \\
&+ [f_n(x_1, \dots, x_{r+1}) - f_m(x_1, \dots x_{r+1})] \frac{d^p}{dx_p}[(x-x_1)\dots(x-x_r)] + \\
&+ [f_n^{(r+1)}(\xi_n) - f_m^{(r+1)}(\xi_m)] \frac{d^p}{dx^p} \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{r+1})}{(r+1)!}\,.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Per ipotesi esiste una costante K tale che per qualsiasi valore dell'indice n e per qualsiasi $\xi \subset (a, b)$ $| f_n^{(r+1)}(\xi) | < K$. Posto mis. $\Delta = \delta$ è poi per $x \subset \Delta$

$$
\left| \frac{d^p}{dx^p}[(x-x_1)\dots(x-x_i)] \right| < \frac{i!}{(i-p)!}\,\delta^{i-p}\,.
$$

Per la (2) e per la convergenza della successione $\{f_n(x)\}$ in $x_1, x_2, \dots, x_{r+1}$ possiamo fissare un indice n^0 tale che per $n, m > n^0$ e $1 \leq i \leq r+1$ sia

$$
| f_n(x_1, x_2, \dots, x_i) - f_m(x_1, x_2, \dots, x_i) | < \delta.
$$

Dalla (6) e dalle disuguaglianze stabilite risulta quindi per n, $m > n_0$ e per $x \subset \Delta$ eccettuato al più un numero finito di punti

$$
\begin{aligned}
| f_n^{(p)}(x) - f_m^{(p)}(x) | &< \delta \cdot p! + \delta \frac{(p+1)!}{1!}\,\delta + \dots + \delta \frac{r!}{(r-p)!}\,\delta^{r-p} + \\
&+ \frac{2K}{(r+1-p)!}\,\delta^{r+1-p} < \frac{r!}{(r-p)!} \sum_{s=1}^{r+1-p} \delta^s + \frac{r!}{(r-p)!}\,K\delta^{r+1-p} < \\
&< 2K \frac{r!}{(r-p)!} \sum_{s=1}^{\infty} \delta^s < 2K(r!)\,\frac{\delta}{1-\delta} \text{ ([3])}.
\end{aligned}
$$

Per la continuità delle funzioni $f_n^{(p)}(x)$, con $n = 1, 2, 3, \dots$ e $0 \leq p \leq r$, si avrà in tutto l'intervallo Δ, nessun punto eccettuato,

([2]) Per la formula del testo nel caso di punti equidistanti cfr. E. PASCAL: *Calcolo delle Variazioni e Calcolo delle differenze finite* (Milano, 1897), p. 230.

([3]) Senza alterare le generalità possiamo supporre $k > 1$, $\delta < 1$.

per $n, m > n^0$

$$| f_n^{(p)}(x) - f_m^{(p)}(x) | \leq r! \cdot 2K \frac{\delta}{1-\delta}.$$

Sia ε un numero positivo arbitrario e sia δ' un numero minore di 1 tale che $r! \cdot 2K \frac{\delta'}{1-\delta'} < \varepsilon$.

Fissato un qualsiasi intervallo $\Delta \subset (a, b)$ di ampiezza $\delta < \delta'$, esistendo per ipotesi $r+1$ punti interni ad esso ove la successione $\{f_m(x)\}$ converge, per quanto precede possiamo determinare un indice n^0 tale che per $n, m > n_0$ e $x \subset \Delta$ sia

$$| f_n^{(p)}(x) - f_m^{(p)}(x) | < \varepsilon. \tag{7}$$

Possiamo allora ricoprire l'intervallo (a, b) con un numero finito di tratti Δ_s di ampiezza $\delta_s < \delta'$ tali che in ciascuno di essi per n, m maggiori di un certo indice $n^0{}_s$ valga la (7). Indicando con N^0 il maggiore fra gli $n^0{}_s$ (che sono finiti e in numero finito) si ha che la (7) vale in tutto (a, b) per $n, m > N^0$. Per l'arbitrarietà di ε risulta allora l'uniforme convergenza in (a, b) delle successioni $\{f_n^{(p)}(x)\}$ con $0 \leq p \leq r$.

Posto $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ per l'uniforme convergenza delle successioni derivate si ha per un teorema di derivazione per serie che la funzione $f(x)$ ha derivate determinate e finite ovunque in (a, b) fino all'ordine r con $f^{(p)}(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n^{(p)}(x)$ per $1 \leq p \leq r$.

c) Si osservi che se la successione $\{f_n^{(r+1)}(x)\}$ è pure convergente essa converge alla derivata $r+1$-esima di $f(x)$. Infatti posto $\varphi(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n^{(r+1)}(x)$essendo le funzioni $f_n^{(r+1)}(x)$ ugualmente limitate si ha per $x \subset (a, b)$

$$\int_a^x \varphi(x)dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^x f_n^{(r+1)}(x)dx$$

e quindi

$$\int_a^x \varphi(x)dx = f^{(r)}(x) - f^{(r)}(a) \qquad \text{e} \qquad \varphi(x) = f^{(r+1)}(x)$$

d) Si possono ridurre le ipotesi del precedente teorema riferendoci alle serie trigonometriche.

Sia data una serie trigonometrica

$$\frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \tag{8}$$

e le somme parziali della serie dedottane derivandola termine a termine r + 1 *volte siano egualmente limitate. In tal caso si ha che:*

I) *la serie* (8) *e le serie ottenute da essa derivandola termine a termine* p *volte, con* $1 \leq p \leq r$, *sono uniformemente convergenti;*

II) *indicato con* f(x) *la somma della serie* (8), *la funzione* f(x) *ha ovunque derivata determinata e finita fino all' ordine* r *con*

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^p}{dx^p} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \qquad \textit{per } 1 \leq p \leq r.$$

Per ipotesi possiamo fissare un numero positivo M tale che per qualsiasi valore dell' indice s sia

$$\left| \sum_{n=1}^{s} \frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \right| < M,$$

e quindi

$$\left| \frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \right| < 2M,$$

e dovendo questa disuguaglianza valere per qualsiasi valore della x e in particolare per quei valori della x per cui si annulla la derivata $r+1$ -esima di $\cos nx$ o di $\operatorname{sen} nx$ si ha per ogni valore dell' indice n

$$| a_n n^{r+1} | < 2M, \qquad | b_n n^{r+1} | < 2M.$$

Queste due disuguaglianze comportano la convergenza quasi ovunque della serie (8) ([4]) e quindi, valendo le ipotesi del teorema precedente, le proposizioni I) e II) sono dimostrate.