Letterio Toscano

Osservazioni su particolari funzioni di Kummer

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.3, p. 274–278.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_3_274_0>

Osservazioni su particolari funzioni di Kummer.

Nota di LETTERIO TOSCANO (a Messina).

Sunto - *Si studia la particolare funzione di* KUMMER ${}_1F_1(-n; -kn; x)$ *con* n *e* k *interi positivi, e per* $k=2$ *si confronta con altra funzione ipergeometrica del tipo* ${}_2F_0$. *Segue qualche altra considerazione, analoga e più generale.*

1. È noto che la funzione ipergeometrica di KUMMER è definita dalla

$$ {}_1F_1(\alpha;\ \gamma;\ x) = \sum_0^\infty{}_i \frac{(\alpha,\ i)}{(\gamma,\ i)} \frac{x^i}{i!} \qquad |x| < 1. $$

(4) Cfr. ad es. L. TONELLI: *Serie trigonometriche* (Bologna 1928), pag. 67.

E vediamo di esaminarla nel caso $\alpha = -n$, $\gamma = -kn$, con n e k interi positivi.

Essa può considerarsi come somma di tre funzioni, che da essa si deducono facendo variare l'indice i nei successivi intervalli $(0,\ n)$, $(n+1,\ kn)$, $(kn+1,\ \infty)$.

La prima funzione, con i polinomi di LAGUERRE

$$L_n^{(a)}(x) = \frac{(a+1,\ n)}{n!}\, {}_1F_1(-n;\ a+1;\ x),$$

ci da

$$\sum_0^n {}_i \frac{(-n,\ i)}{(-kn,\ i)} \frac{x^i}{i!} = \frac{(-1)^n n!\,(\overline{k-1}\,n)!}{(kn)!} L_n^{(-kn-1)}(x).$$

La seconda è nulla.

Per la terza si ha

$$\sum_{kn+1}^{\infty} {}_i \frac{(-n,\ i)}{(-kn,\ i)} \frac{x^i}{i!} = \frac{(-1)^{(k-1)n} n!}{k(kn)!} x^{kn+1} \sum_0^{\infty} {}_i \frac{(\overline{k-1}\,n+i)!}{(kn+i+1)!} \frac{x^i!}{i!}$$

$$= \frac{(-1)^{(k-1)n}!\,(\overline{k-1}\,n)!}{k(kn)!\,(kn+1)!} x^{kn+1} \sum_0^{\infty} {}_i \frac{(\overline{k-1}\,n+1,\ i)}{(kn+2,\ i)} \frac{x^i}{i!}$$

$$= \frac{(-1^{(k-1)n} n!\,(\overline{k-1}\,n)!}{k(kn)!\,(kn+1)!} x^{kn+1}\, {}_1F_1(\overline{k-1}\,n+1;\ kn+2;\ x).$$

Vale quindi

$$\begin{aligned} & k(kn)!\,(kn+1)!\, {}_1F_1(-n;\ -kn;\ x) + \\ (1) \qquad & + (-1)^{(k-1)n+1} n!\,(\overline{k-1}\,n)!\, x^{kn+1}\, {}_1F_1(\overline{k-1}\,n+1;\ kn+2;\ x) \\ & = (-1)^n k \cdot n!\,(\overline{k-1}\,n)!\,(kn+1)!\, L_n^{(-kn-1)}(x). \end{aligned}$$

Per $k = 2$ si ha la relazione

$$\begin{aligned} & 2(2n)!\,(2n+1)!\, {}_1F_1(-n;\ -2n;\ x) + \\ (2) \qquad & + (-1)^{n+1} n!\, n!\, x^{2n+1}\, {}_1F_1(n+1;\ 2n+2;\ x) \\ & = (-1)^n 2 \cdot n!\, n!\,(2n+1)!\, L_n^{(-2n-1)}(x), \end{aligned}$$

in cui le funzioni di KUMMER sono dello stesso tipo, e cioè, in entrambe, il parametro γ è doppio di α. Per tali funzioni vale la formula di KUMMER [1]

$${}_1F_1(\alpha;\ 2\alpha;\ x) = e^{\frac{x}{2}}\, {}_0F_1\left(\alpha + \frac{1}{2};\ \frac{x^2}{16}\right);$$

[1] HUMBERT P.: *Monographie des polynomes de Kummer*, « Nouvelles Ann. de Mathématiques », s. 5, T. 1, 1922.

e la precedente può così assumere la forma

$$
\begin{aligned}
&2(2n)\,!\,(2n+1)\,!\,e^{\frac{x}{2}}{}_0F_1\left(-n+\frac{1}{2};\frac{x^2}{16}\right)+\\
(3)\qquad &+(-1)^{n+1}n\,!\,n\,!\,x^{2n+1}e^{\frac{x}{2}}{}_0F_1\left(n+\frac{3}{2};\frac{x^2}{16}\right)\\
&=(-1)^n 2\cdot n\,!\,n\,!\,(2n+1)\,!\,L_n^{(-2n-1)}(x),
\end{aligned}
$$

o l'altra $(\varepsilon^2=-1)$

$$
(4)\quad \frac{(-1)^n n\,!}{(2\varepsilon x)^n}L_n^{(-2n-1)}(2\varepsilon x)=\varepsilon^{-n-1}e^{\varepsilon x}\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\left\{J_{n+\frac{1}{2}}(x)+\varepsilon(-1)^n J_{-n-\frac{1}{2}}(x)\right\},
$$

introducendo le funzioni di BESSEL.

2. La (4) non è da ritenersi nuova. Sotto altra forma trovasi in lavori di CURZON (²) e di BORDONI (³), dedotta con diverso procedimento. Quest' ultimo autore presenta il primo membro della (4) nella forma

$$
f_n(\varepsilon x)={}_2F_0\left(-n,n+1;\frac{\varepsilon}{2x}\right),
$$

ed è facile stabilirne l'equivalenza.

Infatti per i polinomi ipergeometrici si ha (⁴)

$$
\begin{aligned}
&{}_2F_1(-n,\beta;\gamma;x)=\\
(5)\qquad &=\frac{(\beta,n)}{(\gamma,n)}(-x)^n{}_2F_1\left(-n,\,-n-\gamma+1;\,-n-\beta+1;\,\frac{1}{x}\right),
\end{aligned}
$$

e facendo $x=\gamma x$ e procedendo al limite per $\gamma\to\infty$, si deduce

$$
(6)\quad {}_2F_0(-n,\beta;x)=(\beta,n)(-x)^n{}_1F_1\left(-n;\,-n-\beta+1;\,\frac{-1}{x}\right).
$$

Da questa segue, come si voleva,

$$
f_n(\varepsilon x)={}_2F_0\left(-n,\,n+1;\,\frac{\varepsilon}{2x}\right)=\frac{(-1)^n n\,!}{(2\varepsilon x)^n}L_n^{(-2n-1)}(2\varepsilon x).
$$

(²) CURZON H. E. J.: *Generalisation of the Hermite functions and their connexion with the Bessel functions*, « Proceedings of the London Mathematical Society », s. 2. v. 13, 1913

(³) BORDONI P. G.: *Sulle funzioni di Stokes*, « Commentationes - Pontificia Accademia Scientiarum », Anno IX, v. IX, n. 3, 1945..

(⁴) TOSCANO L.: *Sui polinomi ipergeometrici*, « Bollettino Unione Matematica Italiana », s. II, Anno I, 1939.

La funzione $f_n(\varepsilon x)$ è detta da BORDONI funzione di STOKES di prima specie, e quì si vede che essa è intimamente legata ai polinomi di KUMMER (o di LAGUERRE).

3. La (6), che ci ha consentito il precedente confronto, ed altra estensione che sarà qui fatta — ed altre che si possono fare — sono utili per stabilire l'equivalenza di relazioni che apparentemente sembrano diverse. Così dalle relazioni [5]

$$ {}_2F_0(\alpha, \beta;\, x)\,{}_2F_0(\alpha, \beta;\, -x) = {}_4F_1\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha+\beta+1}{2};\, \alpha+\beta;\, 4x^2\right) $$

$$ {}_1F_1(\alpha;\, \gamma+1;\, x)\,{}_1F_1(\alpha;\, \gamma+1;\, -x) = $$
$$ = {}_2F_3\left(\alpha, \gamma+1-\alpha;\, \gamma+1, \frac{\gamma+1}{2}, \frac{\gamma+2}{2};\, \frac{x^2}{4}\right), $$

(RAMANUJAN)

applicando la (6) e operando qualche mutamento di notazioni, si hanno le particolari

$$ (n\,!)^2 L_n^{(\beta)}(x) L_n^{(\beta)}(-x) = $$
$$ \tag{7} = (-x^2)^n\,{}_4F_1\left(-n, -n-\beta, -n-\frac{\beta}{2}, -n-\frac{\beta-1}{2};\, -2n-\beta;\, \frac{4}{x^2}\right) $$

$$ (n\,!)^2 L_n^{(\beta)}(x) L_n^{(\beta)}(-x) = $$
$$ \tag{8} = (\beta+1, n)^2\,{}_2F_3\left(-n, n+\beta+1;\, \beta+1, \frac{\beta+1}{2}, \frac{\beta+2}{2};\, \frac{x^2}{4}\right). $$

E una volta stabilita l'equivalenza dei primi membri, rimane da stabilire quella dei secondi membri. Si ha

$$ (-n-\delta,\, n-i) = (-1)^{n-i}\frac{(\delta+1,\, n)}{(\delta+1,\, i)} $$

$$ (-2n-\delta,\, n-i) = (-1)^{n-i}\frac{(n+\delta+1,\, n)}{(n+\delta+1,\, i)}, $$

da cui

$$ (-x^2)^n\,{}_4F_1\left(-n, -n-\beta, -n-\frac{\beta}{2}, -n-\frac{\beta-1}{2};\, -2n-\beta;\, \frac{4}{x^2}\right) $$

$$ = (-4)^n \sum_{0}^{n}{}_i \frac{(-n, i)(-n-\beta, i)\left(-n-\frac{\beta}{2}, i\right)\left(-n-\frac{\beta-1}{2}, i\right)}{(-2n-\beta,\, i)\,i\,!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^{n-i} $$

[5] BAILEY W. N.: *Products of generalized hypergeometric series*, « Proceedings of the London Mathematical Society. s. 2, v. 28, 1928.

$$= -4)^n \sum_0^n {}_i \frac{(-n,\ n-i)(-n-\beta,\ n-i)\left(-n-\frac{\beta}{2}, n-i\right)\left(-n-\frac{\beta-1}{2},\ n-i\right)}{(-2n-\beta,\ n-i)(n-i)\,!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^i$$

$$= \frac{(\beta+1,\ n)\left(\frac{\beta+1}{2},\ n\right)\left(\frac{\beta+2}{2},\ n\right)2^{2n}}{(n+\beta+1,\ n)} \sum_0^n {}_i \frac{(-n,\ i)(n+\beta+1,\ i)}{(\beta+1,\ i)\left(\frac{\beta+1}{2},\ i\right)\left(\frac{\beta+2}{2},\ i\right)i\,!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^i.$$

Ma

$$\frac{2^{2n}\left(\frac{\beta+1}{2},\ n\right)\left(\frac{\beta+2}{2},\ n\right)}{(n+\beta+1,\ n)} = \frac{(\beta+1,\ 2n)}{(n+\beta+1,\ n)} = (\beta+1,\ n),$$

e quindi

$$(9)\quad \begin{aligned} &(-x^2)^n {}_4F_1\left(-n,\ -n-\beta, -n-\frac{\beta}{2},\ -n-\frac{\beta-1}{2};\ -2n-\beta;\ \frac{4}{x}\right) \\ &= (\beta+1,\ n)^2 {}_2F_3\left(-n,\ n+\beta+1;\ \beta+1,\ \frac{\beta+1}{2},\ \frac{\beta+2}{2};\ \frac{x^2}{4}\right). \end{aligned}$$

Questa relazione prova che le (7) e (8) sono equivalenti.

4. Per un'ultima applicazione della (6) consideriamo la relazione [6]

$$\begin{aligned} &{}_2F_0(\alpha,\ 1-\alpha;\ x)\,{}_2F_0(\beta,\ 1-\beta;\ -x) = \\ &= {}_4F_1\left(\frac{1+\alpha-\beta}{2},\ \frac{1-\alpha+\beta}{2},\ \frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{2-\alpha-\beta}{2};\ \frac{1}{2};\ 4x^2\right) \\ &- (\alpha-\beta)(\alpha+\beta-1)x\,{}_4F_1\left(\frac{2+\alpha-\beta}{2},\ \frac{2-\alpha+\beta}{2},\ \frac{\alpha+\beta+1}{2},\ \frac{3-\alpha-\beta}{1};\ \frac{3}{2};\ 4x^2\right). \end{aligned}$$

Se $\alpha = -m$ e $\beta = -n$, con m ed n interi positivi, si ha

$$(10)\quad \begin{aligned} &(-1)^n m\,!\,n\,!\,x^{m+n} L_m^{(-2m-1)}\left(-\frac{1}{x}\right) L_n^{(-2n-1)}\left(\frac{1}{x}\right) = \\ &= {}_4F_1\left(\frac{1-m+n}{2},\ \frac{1+m-n}{2},\ \frac{-m-n}{2},\ \frac{2+m+n}{2};\ \frac{1}{2};\ 4x^2\right) \\ &+ (n-m)(m+n+1)x\,{}_4F_1\left(\frac{2-m+n}{2},\ \frac{2+m-n}{2},\ \frac{-m-n+1}{2},\ \frac{3+m+n}{2};\ \frac{3}{2};\ 4x^2\right). \end{aligned}$$

E per $m = n$

$$(11)\quad (-1)^n(n\,!)^2 x^{2n} L_n^{(-2n-1)}\left(\frac{1}{x}\right) L_n^{(-2n-1)}\left(\frac{-1}{x}\right) = {}_3F_0\left(\frac{1}{2},\ -n,\ n+1;\ 4x^2\right).$$

[6] Cfr. [5].