Bollettino
Unione Matematica Italiana

Giuliana Berti

Qualche proprietà di alcuni operatori introdotti dal Volterra

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.3, p. 279–281.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_3_279_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1949.

Qualche proprietà di alcuni operatori introdotti dal Volterra.

Nota di GIULIANA BERTI (a Bologna)

Sunto. - *Si considerano gli operatori* C_r, *introdotti dal* VOLTERRA, *che applicati ad una funzione continua* f(t) *danno come risultato:*

$$C_r f(t) = c_r f(t) + \int_0^t \gamma_r(t, \tau) f(\tau) d\tau$$

dove c_r *è un numero,* $\gamma_r(t, \tau)$ *una funzione continua di* t *e* τ.

Per questi operatori si dimostrano valide in ogni caso le proprietà associativa e distributiva, mentre la proprietà commutativa è verificata quando γ_r *è funzione solo di* $t - \tau$.

I). Il VOLTERRA [1] ha introdotto alcuni operatori, che indicheremo con C_r o C_s, e che, applicati ad una funzione $f(t)$ continua per $t \geq 0$, danno come risultato una nuova funzione continua $C_r f(t)$ definita dalla formula:

$$C_r f(t) = c_r f(t) + \int_0^t \gamma_r(t, \tau) f(\tau) d\tau \tag{1}$$

dove c_r è un numero, $\gamma_r(t, \tau)$ una funzione continua di t e τ (per $t \geq 0$, $\tau \geq 0$); ovviamente il numero c_r e la funzione $\gamma_r(t, \tau)$ definiscono completamente l'operatore C_r. Scriveremo anzi, per brevità, $C_r = [c_r, \gamma_r]$ Analoga definizione vale per C_s.

Naturalmente se $c_r = 1$ e $\gamma_r(t, \tau)$ è identicamente nulla, l'operatore C_r si riduce all'operatore unità, che muta ogni funzione $f(t)$ in sè stessa.

n questa nota, studieremo alcune proprietà, che non mi sembrano enunciate esplicitamente dal VOLTERRA, dei predetti operatori: cioè, dopo aver definito la loro somma, il loro prodotto e l'operatore inverso, proveremo che essi soddisfano alla proprietà associativa e distributiva e, nel caso particolare ben noto in cui $\gamma_r(t, \tau)$ è funzione di $(t - \tau)$, alla proprietà commutativa.

II). Diremo somma degli operatori C_r e C_s l'operatore $(C_r + C_s)$ definito dal numero $c_r + c_s$ e dalla funzione $\gamma_r(t, \tau) + \gamma_s(t, \tau)$: cioè

[1]) VOLTERRA: *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris, Gauthier Villars. 1913 Cap. VIII § 1. In seguito questa opera verrà indicata con F. D. L,

$(C_r + C_s) = [c_r + c_s, \gamma_r + \gamma_s]$; diremo prodotto fra C_r e un numero h l'operatore $hC_r = [hc_r, h\gamma_r]$.

Intenderemo poi per prodotto dei due operatori C_r e C_s l'operatore $(C_r C_s)$ che applicato ad una funzione continua $f(t)$ dà per risultato C_r applicato a $C_s f(t)$. Ossia:

$$(C_r C_s)f(t) = C_r(C_s f(t)) = C_r(c_s f(t) + \int_0^t \gamma_s(t, \tau)f(\tau)d\tau) = c_r c_s f(t) +$$

$$+ \int_0^t [c_r\gamma_s(t, \tau) + c_s\gamma_r(t, \tau)]f(\tau)d\tau + \int_0^t \gamma_r(t, \tau)d\tau \int_0^\tau \gamma_s(\tau, \xi)f(\xi)d\xi$$

dove ξ indica una nuova variabile.

Cioè applicando all'ultimo termine la formula di DIRICHLET:

$$(C_r C_s)f(t) = c_r c_s f(t) + \int_0^t [c_r\gamma_s(t, \tau) + c_s\gamma_r(t, \tau) + \int_\tau^t \gamma_r(t, \xi)\gamma_s(\xi, \tau)d\xi]f(\tau)d\tau =$$

$$= c_r c_s f(t) + \int_0^t [c_r\gamma_s(t, \tau) + c_s\gamma_r(t, \tau) + \dot{\gamma}_r\dot{\gamma}_s]f(\tau)d\tau$$

dove conforme, alla notazione del VOLTERRA per il prodotto di composizione [2]:

$$\dot{\gamma}_r\dot{\gamma}_s = \int_\tau^t \gamma_r(t, \xi)\gamma_s(\xi, \tau)d\xi \, .$$

Quindi il prodotto fra due operatori C_r e C_s è definito dal numero $c_r c_s$ e dalla funzione $c_r\gamma_s(t, \tau) + c_s\gamma_r(t, \tau) + \dot{\gamma}_r\dot{\gamma}_s$ cioè:

$$C_r C_s = [c_r c_s, \; c_r\gamma_s + c_s\gamma_r + \dot{\gamma}_r\dot{\gamma}_s] \, . \tag{2}$$

Ossia il prodotto di due operatori è un operatore dato dal numero prodotto dei due numeri che li definiscono e dalla funzione ottenuta sommando i prodotti fra il numero relativo a un operatore e la funzione relativa all'altro, con il prodotto di composizione secondo VOLTERRA delle due funzioni.

Chiameremo infine, operatore inverso di C_r l'operatore C_r^{-1} definito dal numero $\frac{1}{c_r}$ e dalla funzione $F_r(t, \tau)$ dove $c_r F_r(t, \tau)$ è il nucleo coniugato secondo VOLTERRA [3] di $\frac{\gamma_r(t, \tau)}{c_r}$, cioè:

$$\frac{\gamma_r(t, \tau)}{c_r} + c_r F_r(t, \tau) + \dot{\gamma}_r \dot{F}_r = 0 \, , \tag{3}$$

(2) F. D. L. Cap. IX, § 2.
(3) F. D. L. Cap. IV, § 4.

È facile provare che $(C_r^{-1} C_r)$ è l'operatore unità. Infatti esso è definito dal numero $\frac{1}{c_r} c_r$ e dalla funzione $c_r F_r(t, \tau) + \frac{1}{c_r} \gamma_r(t, \tau) + \dot{\gamma}_r \dot{F}_r$ che è nulla per la (3).

[II]). Dimostriamo ora per i predetti operatori la proprietà associativa.

Sia C_k un terzo operatore definito dal numero c_k e dalla funzione $\gamma_k(t, \tau)$, cioè: $C_k = [c_k, \gamma_k]$ - Ora si ha, applicando la (2)

$$C_k(C_r C_s) = [c_k c_r c_s,\ c_k c_r \gamma_s + c_k c_s \gamma_r + c_r c_s \gamma_k + c_k \dot{\gamma}_r \dot{\gamma}_s + c_r \dot{\gamma}_k \dot{\gamma}_s + c_s \dot{\gamma}_k \dot{\gamma}_r + \dot{\gamma}_k(\dot{\gamma}_r \dot{\gamma}_s)].$$

Invece, osservando che $(C_k C_r) = [c_k c_r,\ c_k \gamma_r + c_r \gamma_k + \dot{\gamma}_k \dot{\gamma}_r]$. si ha:

$$(C_k C_r) C_s = [c_k c_r c_s,\ c_k c_r \gamma_s + c_r c_s \gamma_k + c_k c_s \gamma_r + c_r \dot{\gamma}_k \dot{\gamma}_s + c_k \dot{\gamma}_r \dot{\gamma}_s + c_s \dot{\gamma}_k \dot{\gamma}_r + (\dot{\gamma}_k \dot{\gamma}_r) \dot{\gamma}_s]$$

ma, come il VOLTERRA ha provato (4):

$$(\dot{\gamma}_k \dot{\gamma}_r) \dot{\gamma}_s = \dot{\gamma}_k (\dot{\gamma}_r \dot{\gamma}_s)$$

quindi:

$$(C_k C_r) C_s = C_k (C_r C_s)$$

e la proprietà associativa è dimostrata.

Osservando poi che:

$$\dot{\gamma}_k \dot{\gamma}_r + \dot{\gamma}_k \dot{\gamma}_s = \dot{\gamma}_k (\dot{\gamma}_r + \dot{\gamma}_s)$$

si ha:

$$C_k C_r + C_k C_s = [c_k c_r + c_k c_s,\ c_k \gamma_r + c_r \gamma_k + \dot{\gamma}_k \dot{\gamma}_r + c_k \gamma_s + c_s \gamma_k + \dot{\gamma}_k \dot{\gamma}_s] =$$
$$= [c_k(c_r + c_s),\ c_k(\gamma_r + \gamma_s) + (c_r + c_s)\gamma_k + \dot{\gamma}_k(\dot{\gamma}_r + \dot{\gamma}_s)] = C_k(C_r + C_s)$$

cioè gli operatori soddisfano la proprietà distributiva.

Infine i predetti operatori soddisfano la proprietà commutativa se vale la relazione;

$$\dot{\gamma}_r \dot{\gamma}_s = \dot{\gamma}_s \dot{\gamma}_r$$

che si verifica però, come ha mostrato il VOLTERRA (5), solo nel caso particolare in cui γ_r e γ_s sono funzioni della differenza $t - \tau$.

Spero in una prossima nota, di applicare questi risultati a un problema di elasticità ereditaria.

(4) F. D. L. Cap. IX, § 2.
(5) F. D. L. Cap. IX, § 3.