BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Ettore Carruccio

Sulla potenza dell'insieme delle proposizioni di un dato sistema ipotetico-deduttivo

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.3, p. 299–306.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_3_299_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1949.

Sulla potenza dell'insieme delle proposizioni di un dato sistema ipotetico-deduttivo.

Nota di ETTORE CARRUCCIO (a Modena).

Sunto. - *In risposta ad un articolo di* G. GIORGI *si precisa e si dimostra l'affermazione: L'insieme delle proposizioni di un sistema ipotetico-deduttivo completamente noto, e che contiene infinite proposizioni, è effettivamente numerabile. Si danno condizioni sufficienti affinchè un sistema sia completamente noto, e si verifica che dette condizioni sono soddisfatte per i sistemi sviluppati secondo le leggi della Logica tradizionale e secondo la Logica matematica di* HILBERT. *Si discutono infine alcune considerazioni di* G. GIORGI *sullo studio della Logica nei suoi rapporti con la Matematica.*

1. In alcuni scritti di logica matematica (1) mi sono valso dell'affermazione: le proposizioni di un dato sistema ipotetico-deduttivo formano un insieme che, se è infinito, è numerabile. Sulla validità dell'affermazione indicata sono stati formulati dubbi nell'interessante articolo di G. GIORGI, *A proposito di alcune discussioni recenti sui problemi della logica deduttiva* (Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, dicembre 1948).

Sono grato all'Autore dello scritto citato, in quanto detto articolo contribuisce a risvegliare l'interesse degli studiosi sui problemi che formano l'oggetto preferito delle mie riflessioni e m'induce a riprendere in esame la questione della numerabilità delle proposizioni di un sistema ipotetico-deduttivo o sistema di deduzioni: appunto a precisare il significato dell'affermazione di cui sopra su tale argomento e quindi a dimostrarla è dedicato il presente articolo (2).

Osservo innanzi tutto che l'affermazione in questione si deve riferire a proposito di un dato sistema S esprimibile mediante un numero finito di simboli o segni linguistici. La condizione di

(1) V. E. CARRUCCIO, *Considerazioni sulla compatibilità di un sistema di postulati e sulla dimostrabilità delle formule matematiche.* (Pontificia Academia Scientiarum, Acta X, N. 2); *Alcune conseguenze di un risultato del Gödel e la razionalità del reale.* (Atti della Società dei Naturalisti e Matematici di Modena, 1947); *Il problema dell'esprimibilità in simboli di un sistema ipotetico deduttivo* («Sigma» n. 6-7) Roma 1948.

(2) Il contenuto del presente scritto ha formato oggetto di una relazione presentata al III. Congresso Nazionale dell'Unione Matematica Italiana (Pisa 23-27 settembre 1948).

esprimibilità ora indicata è essenziale per la numerabilità dell'insieme considerato. Infatti, se noi prendiamo in esame, ad esempio, un sistema ipotetico-deduttivo del quale fanno parte i singoli enunciati di una proprietà dei numeri reali, enunciati applicati ai singoli numeri reali, detti enunciati formerebbero un insieme di potenza uguale o maggiore a quella del continuo. Ma gli enunciati di detto sistema non sarebbero esprimibili con un numero finito di simboli in quanto negli enunciati stessi dovrebbero figurare le definizioni dei singoli numeri reali. Ora come è noto non tutti i numeri reali sono definibili con un numero finito di simboli [3].

Escludiamo anche dal computo delle proposizioni del sistema, le proposizioni inesprimibili la cui inesprimibilità è dovuta all'impossibilità di esprimere integralmente il modo mediante il quale dalle premesse si traggono le conseguenze [4]. Consideriamo dunque l'insieme I, per ipotesi infinito, delle proposizioni di un sistema ipotetico deduttivo S, esprimibile mediante un numero finito di simboli o segni linguistici.

Ognuna delle proposizioni di I si esprime mediante una particolare disposizione con ripetizione di un numero x finito di simboli, presi ad 1 ad 1, o a 2 a 2, o a 3 a 3, etc. Quindi l'insieme delle espressioni di I è contenuto nell'insieme D formato dalle disposizioni con ripetizione di x simboli ad 1 ad 1, a 2 a 2, etc. Ma l'insieme D è numerabile; infatti ad ognuno degli x simboli $s_0\ s_1 \dots s_{x-1}$, mediante i quali si esprime S possiamo far corrispondere una cifra da 0 a $x-1$ di una numerazione in base x, e ad ogni disposizione di D, il numero in base x che si ottiene applicando la regola relativa alla posizione delle cifre, usata per la consueta numerazione in base 10. Ad ogni espressione E di $n+1$ simboli corrisponde cioè il numero:

$$a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1} + \dots + a^n$$

Dove $a_0\ a_1 \dots a_n$ sono le cifre corrispondenti ai simboli che compaiono ordinatamente in E.

L'insieme D è dunque numerabile.

Ora le infinite espressioni delle proposizioni di I, sono contenute nell'insieme numerabile D; quindi, per un noto risultato della teoria degli insiemi, è numerabile l'insieme delle espressioni di I [5].

Ma esiste una corrispondenza biunivoca fra le proposizioni

(3) V. p. es. L. GEYMONAT, *Storia e filosafia dell'analisi infinitesimale,* Torino 1947, pagg. 292, 293.

(4) V. E. CARRUCCIO, *Il problema dell'esprimibilità...* già citato.

(5) V. p. es. W. SIERPINSKI, *Leçons sur les nombres transfinis,* Paris 1928, pag, 41.

esprimibili di I e le loro espressioni. Si conclude che l'*insieme* I *è numerabile.*

2. Sorge ora la questione: è effettivamente possibile stabilire una ben determinata corrispondenza tra le proposizioni di I e la serie naturale dei numeri? ([6]).

Rispondo affermativamente nel caso in cui il sistema S si considera *completamente noto,* dove si dice, per definizione, completamente noto un sistema S, quando si conoscono le premesse di S (postulati e regole per dedurre), e quindi da queste premesse si sanno ricavare *ad uno ad uno tutti* i teoremi del sistema, è nota cioè la legge di formazione dei teoremi di S.

In queste ipotesi la corrispondenza tra l'insieme I e l'insieme dei numeri naturali è perfettamente determinata.

In caso diverso il sistema S non è completamente noto in quanto non si conosce la legge di formazione di tutti i suoi teoremi.

Si conclude:

L'insieme delle proposizioni esprimibili di un dato sistema ipotetico-deduttivo S *contenente infinite proposizioni è numerabile; e se* S *è completamente noto, è possibile stabilire effettivamente una ben determinata corrispondenza tra le proposizioni di* S *e la serie naturale dei numeri.*

3. Una condizione sufficiente affinchè un sistema ipotetico-deduttivo sia completamente noto è la seguente:

Se in un sistema ipotetico-deduttivo S *si possiede un criterio per riconoscere le conseguenze immediate di una classe finita di proposizioni appartenenti ad* S, *e dette conseguenze immediate sono in numero finito, il sistema* S *è completamente noto.*

Infatti: il sistema S venga espresso mediante l'impiego di x simboli $s_0\ s_1 \dots s_{x-1}$. E si esprimano mediante detti simboli le proposizioni primitive del sistema in una successione ordinata: $p_1\ p_2 \cdots p_m$.

Ordiniamo ora tutte le disposizioni con ripetizione dei simboli $s_0\ s_1 \dots s_{x-1}$ ad 1 a 1, a 2 a 2 ... nel modo indicato nel n. 1.

Per ogni disposizione di simboli così costruita si verifichi se si tratta di una conseguenza immediata delle proposizioni primitive di S.

Quando s'incontra la prima c_1 di queste conseguenze immediate,

([6]) Si possono distinguere (v. p. es. SIERPINSKI op. cit. pag. 23, 42, 43) tra gli insiemi *numerabili* quelli *effettivamente numerabili,* per i quali cioè si sa stabilire una corrispondenza biunivoca determinata fra gli insiemi considerati e la serie naturale dei numeri.

la si trascriva dopo la p_m nell'elenco delle proposizioni valide in S. Poi si ritorni indietro nell'elenco ordinato delle disposizioni di simboli e si verifichi, a partire dalla 1ª disposizione, se esistono proposizioni che siano conseguenze immediate di $p_1 \dots p_m\ c_1$.

Quando si incontra la prima di queste conseguenze, diversa da $p_1 \dots p_m\ c_1$, che chiameremo c_2, la si scriva nell'elenco delle proposizioni valide in S, che diventerà $p_1 \dots p_m\ c_1\ c_2$, e si ritorni, a partire dalla prima delle disposizioni considerate, a verificare quali sono tra queste le espressioni di proposizioni che sono conseguenze immediate di $p_1 \dots p_m\ c_1\ c_2$. Sia c_3 la prima conseguenza immediata così trovata diversa da $p_1 \dots p_m\ c_1\ c_2$. L'elenco delle proposizioni valide diventerà pertanto: $p_1 \dots p_m\ c_1\ c_2\ c_3$. E così si proceda indefinitamente.

Osserviamo che con questo procedimento si giunge a prendere in esame ogni disposizione dei simboli $s_0 \dots s_{x-1}$, dopo un numero finito di operazioni.

Infatti giunti alla disposizione r^{esima} non si dovrà ritornare indietro riprendendo in esame la prima disposizione senza oltrepassare la disposizione r^{esima}, più di r-1 volte.

Quindi verranno scritte nell'elenco delle proposizioni valide in S tutte le le conseguenze immediate delle proposizioni primitive, tutte le conseguenze immediate delle proposizioni primitive e delle loro conseguenze immediate, e così via. Tutte le proposizioni valide in S verranno ad una ad una raggiunte e verificate nella loro validità. Il sistema S è dunque completamente noto, c. v. d.

4. Si presenta spontaneamente un'altra questione: i sistemi ipotetico-deduttivi che s'incontrano nel mondo matematico ci forniscono esempi di sistemi completamente noti, nel senso già precisato?

Consideriamo innanzi tutto un sistema di premesse scritte sotto la forma tipica della logica tradizionale: "tutti gli A sono B„ "nessun A è B„ qualche A è B„ "qualche A non è B„. Su di esse, come pure sulle loro conseguenze immediate e conseguenze delle conseguenze e così via, vogliamo operare secondo le leggi della logica formale tradizionale: regole della conversione e del sillogismo.

Le regole della conversione permettono di ricavare da una conveniente proposizione una determinata conseguenza; per es. da "tutti gli A sono B„ si ricava "qualche A è B„. Mentre le regole del sillogismo permettono di ricavare da due convenienti proposizioni una determinata conseguenza. Sappiamo dunque riconoscere se una proposizione è o non è una conseguenza immediata di una o di due proposizioni scritte sotto la forma tipica della logica tradizionale, e le conseguenze immediate di un numero finito di dette proposizioni sono in numero finito.

Pertanto per la condizione sufficiente dimostrata si può concludere che è completamente noto un sistema ipotetico–deduttivo in cui si opera a partire da un sistema finito di proposizioni primitive scritte sotto la forma tipica della logica tradizionale con le regole di detta logica.

Consideriamo ora un sistema sviluppato secondo i principi del calcolo delle proposizioni di HILBERT (7).

In un tale sistema troviamo tra le proposizioni primitive alcuni assiomi logici, le proposizioni proprie del particolare sistema considerato e le regole per dedurre (8).

Nel calcolo delle proposizioni queste regole sono:

α) *Regola di sostituzione.* In una formula logica valida, in luogo di una proposizione variabile, può venir sostituita dovunque essa compare una stessa combinazione di proposizioni che appartiene al campo di variabilità della proposizione sostituita.

β) *Schema di deduzione.* Da due formule A e $A \rightarrow B$ (A implica B) si deduce la nuova formula B.

Le due regole enunciate permettono di passare da due convenienti premesse ad una conseguenza. Ciò risulta in modo immediato per lo schema di deduzione. Per quanto riguarda la regola di sostituzione basta osservare che dalle due premesse: " formula logica relativa alla variabile x „ e " a appartiene al campo per cui è definita la formula precedente „ si ottiene " formula logica relativa ad a „.

Nel calcolo di funzioni logiche di HILBERT, agli assiomi ed alle regole per dedurre ora indicati, si aggiungono due assiomi e due regole per dedurre che permettono di ricavare da una conveniente proposizione un'altra determinata (9).

Si riconosce dunque che anche nel caso della logica di HILBERT si può stabilire se una proposizione è o non è conseguenza imme-

(7) V. D. HILBERT und W. ACKERMANN, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Berlin 1928.

(8) V. D. HILBERT und W. ACKERMANN, op. cit. pagg. 22, 23.

Le regole indicate si trovano già sostanzialmente in G. PEANO, *Formulaire de Mathématique,* Turin 1901 pagg. 9-11; *Formulaire mathématique,* Turin 1902, pagg. 13-15; *Formulario Mathematico,* Torino 1905. pagg. 15-17.

Cfr. anche S. ZAREMBA, *La logique des mathématiques* (Mémorial des sciences mathématiques, fasc. XV, Paris 1926).

(9) V. D. HILBERT und W. ACKERMANN, op. cit. pagg. 53, 54.

diata di date premesse, e che le conseguenze di premesse date in numero finito sono in numero finito. Si conclude pertanto che un sistema sviluppato secondo la logica di HILBERT è completamente noto.

Tenuto conto che detta logica è appunto stata costruita al fine di esprimere le più importanti teorie della matematica moderna, in particolare l'analisi infinitesimale, possiamo dire che la matematica ci fornisce largamente esempi di sistemi completamente noti e tali quindi che le proposizioni di cui sono costituiti formano insiemi effettivamente numerabili.

Viene così colmata la lacuna riscontrata dal GIORGI nella mia dimostrazione relativa all'esistenza di numeri ultra-razionali [10].

[10] Per comodità del lettore, dalla mia nota *Considerazioni sulla compatibilità di un sistema di postulati...* già citata, riporto quanto concerne l'esistenza dei numeri ultrarazionali.

Chiamiamo *ben definito* un numero reale del quale è possibile calcolare valori con un'approssimazione prefissata. Chiamiamo *ultrarazionale* un numero reale del quale non si può dimostrare che è razionale nè che è irrazionale. La legittimità di quest'ultima definizione (esistenza nel mondo del pensiero logico dell'oggetto definito) risulta dal seguente:

TEOREMA: *Esistono numeri ben definiti ultrarazionali.* Infatti: consideriamo l'insieme delle formule che esprimono i postulati e i teoremi dimostrabili di un sistema ipotetico deduttivo S completamente noto, formule poste in corrispondenza biunivoca con la serie naturale dei numeri. Ad ogni proposizione

$$f,\ \mathrm{f}_1 \dots \mathrm{f}_n \dots$$

che non sia in contradizione con una delle precedenti, facciamo corrispondere con una determinata legge i numeri naturali diversi da zero

$$a,\ a_1 \dots a_n \dots \tag{1}$$

(i quali possono anche essere presi per semplicità eguali fra loro). Formiamo ora la frazione continua

$$a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{\ddots}{a_n + \ddots}}} \tag{2}$$

Se si incontra nella successione delle formule di S una formula in contradizione con una delle precedenti, s'interrompe la successione (1) arrestandosi al termine a_n corrispondente all'ultima formula del sistema S che non dà luogo ad esplicita contradizione. La frazione continua (2) sarà uguale in ogni caso ad un numero reale ben definito, razionale se la successione (1) è limitata, irrazionale nel caso contrario.

Ora se il sistema S non è contraddittorio, per un noto teorema del GÖDEL,

5. L'articolo del GIORGI si chiude con alcune osservazioni sui pericoli presentati dallo studio della logica.

Sono d'accordo con l'Autore circa il suo ammonimento di guardarsi dal "feticismo della logica"; ma osservo che sono proprio le vedute della logica contemporanea quelle che possono darci una libertà consapevole da tale feticismo: basta pensare all'evoluzione svoltasi dalla logica aristotelica alla concezione di sistema ipotetico-deduttivo ed ai recenti risultati del GÖDEL sull'impossibilità di dimostrare la non contradditorietà o coerenza di un sistema ipotetico-deduttivo e l'esistenza di proposizioni indecise. Questi risultati mettono appunto in evidenza quali sono le mete irragiungibili dalla logica, mentre soltanto sull'intuizione si può in definitiva basare la garanzia della non contradittorietà di un sistema ipotetico-deduttivo.

Così pure condivido con l'Autore l'esigenza per la quale si preferisce risolvere nuovi problemi con vecchi metodi piuttosto che riottenere soluzioni vecchie sotto forme nuove; ma non mi sembra che si possa asserire (nè lo si asserisce esplicitamente nell'articolo considerato) che gli studi logici sui fondamenti della matematica mai abbiano condotto a risultati nuovi. Si potrebbero scrivere dei volumi sull'influenza della filosofia, in particolare della logica, sulla matematica, e viceversa, ma per dimostrare il valore altamente costruttivo delle ricerche logiche, basta pensare alle indagini critiche sulla compatibilità e indipendenza dei postulati della geometria, che hanno condotto alle geometrie non euclidee, non-archimidee etc. ricordare la teoria degli insiemi nei suoi rapporti con i paradossi della logica e con i fondamenti dell'analisi, il risultato già citato del GÖDEL e le sue conseguenze; mentre il venir meno di vitali ed intimi legami tra filosofia e scienza, nella storia del pensiero è stato un prodromo di decadenza scientifica [11]; ciò vale in particolare per i legami tra logica e matematica.

Del resto, quanto sia viva per lo spirito del matematico ricercatore l'esigenza della meditazione sui problemi logici di carattere generale, risulta tra l'altro dal fatto che anche coloro che vengono

non si potrà dimostrare la sua non contradittorietà, nè prevedere quindi che la successione (1) sarà illimitata e che il numero espresso dalla frazione continua (2) risulterà irrazionale. Neppure si potrà dimostrare che il numero in questione è razionale, perchè ciò equivarrebbe a dire che S è contradittorio contro quanto abbiamo supposto. Esistono dunque numeri ben definiti ultrarazionali, c. v. d.

(11) V. p. es. F. ENRIQUES e G. DIAZ DE SANTILLANA, *Storia del pensiero scientifico*, Milano - Roma 1932, pagg. 352-353.

citati dal GIORGI a sostegno del suo punto di vista (poco favorevole agli studi logici), H. POINCARÉ (12) e F. SEVERI (13), diedero un valido contributo al progresso delle ricerche logiche; mentre lo stesso GIORGI è stato più di una volta attirato dai problemi della logica (14).

Pertanto mentre convengo con il Prof. GIORGI sull'opportunità di guardarsi negli studi logici dal " bizantinismo „ e dal " sadismo di disquisizioni sottili „, ritengo tuttavia essenziale per la formazione del matematico moderno, la visione dello sviluppo del pensiero logico in relazione con l'evoluzione della matematica, visione che si spinge fino a porre i problemi vivi ed insoluti della logica matematica contemporanea, che tuttora si presentano nel loro aspetto suggestivo e sconcertante alla mente del pensatore.

ges. Plus ces spéculations s'écarteront des conceptions les plus communes et par conséquent de la nature et des application, mieux elles nous montreront ce que l'esprit humain peut faire, quant il se soustrait de plus en plus à la tyrannie du monde extérieur, mieux par consequent elles nous le feront connaître en lui-même.

Mais c'est du côté opposé, du côté de la nature, qu'il faut diriger le gros de notre armèe ».

(H. POINCARÉ, *Science et Méthode*, Paris 1908, pagg. 31-32).

(13) Per motivi di brevità mi limito a citare: F. SEVERI, *Intuizionismo e astrattismo nella Matematica contemporanea* (III° Congresso Nazionale dell'Unione Matematica Italiana, Pisa, 23-27 settembre 1948).

(14) Oltre l'articolo già citato, v. G. GIORGI, *Riflessioni sui fondamenti primi della teoria degli insiemi* (Pontificia Academia Scientiarum, anno V, vol. V, n. 6, 1931).

(12) Per mettere in luce il pensiero di POINCARÉ sulle questioni che stiamo esaminando mi limito a trascrivere il seguente passo:

« D'une part, la science mathématique doit réfléchir sur elle-même et cela est utile, parce que réfléchir sur elle-même, c'est réfléchir sur l'esprit humain qui l'a créé, d'autant plus que c'est celle de ses creations pour la quelle il a fait le moins d'emprunts au dehors. C'est pourquoi certaines spéculations mathématiques sont utiles, commes celles qui visent l'étude des postulats, des géometries inaccoutumées, des fonctions à allures étranges ».