RECENSIONI

M. Picone: *Lezioni di Analisi Funzionale*, tenute a Roma nell'anno accademico 1946-1947, [Roma, dispense universitarie Tumminelli], p. 578, L. 1100.

I problemi di I. Newton sul solido di rivoluzione di minima resistenza (1686), della brachistocrona e delle geodetiche di Giovanni Bernoulli (1696-97), degli isoperimetri di Giacomo Bernoulli largamente generalizzati, sia pure in forma non rigorosa, da L. Eulero (1744), portarono nel 1755 J. L. Lagrange alla costruzione del così detto *Calcolo delle Variazioni*. La risoluzione dei problemi veniva strettamente collegata alle equazioni differenziali di Eulero relative agli elementi estremanti, ma poi fu avvertito che in alcune questioni notevoli come il problema di Dirichlet e il problema di Plateau, o nella ricerca degli estremi assoluti, era necessario svincolare, almeno nella parte essenziale, il Calcolo delle Variazioni dalla teoria delle equazioni differenziali.

Nel 1887 V. Volterra da alcune sue ricerche di Fisica Matematica fu indotto a porre i fondamenti del *Calcolo Funzionale* che nel 1889 erano utilizzati da C. Arzelà nel suo tentativo di risoluzione col metodo diretto del problema di Dirichlet, metodo che successivamente, per opera di D. Hilbert (1904), Beppo Levi (1906), G. Fubini (1907) dava una prima risposta definitiva al problema.

Nel 1910 J. Hadamard, nelle sue « *Leçons sur le Calcul de Variations* », notava che la materia nel suo complesso doveva considerarsi come un capitolo di *Analisi Funzionale*, e L. Tonelli nei suoi « *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* » [I, 1921; II, 1923] inspirandosi appunto ai concetti dell'Analisi Funzionale inquadrava e risolveva in modo unitario e completo, col suo metodo diretto, una vasta classe di problemi pertinenti a questo ramo della scienza matematica.

L'Analisi Funzionale ha le sue premesse nella teoria degli *spazi astratti* introdotti nel 1906 da M. Fréchet a fondamento dell'*Analisi Generale*. materia questa che ad opera degli analisti moderni ha oggi ricevuto uno sviluppo mirabile.

M. Picone nei suoi « *Fondamenti di Analisi Funzionale lineare* » (1) si era occupato degli spazi metrici ed aveva mostrato le notevoli applicazioni dell'analisi funzionale lineare in questi spazi sia nei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali lineari sia per alcuni tipi di equazioni funzionali lineari. In questa nuova opera « *Lezioni di Analisi Funzionale* » inspirandosi tanto all'indirizzo classico quanto al moderno, egli tratta ora altri problemi interessanti le applicazioni, e particolarmente i problemi del Calcolo delle Variazioni.

(1) Cfr. questo Bollettino, (3), 2 (1947), pp. 69-70.

Nell'introduzione dopo un'esposizione delle proprietà degli *insiemi astratti* (potenza di un insieme, insiemi numerabili, insiemi con la potenza del continuo, ipotesi del continuo, ...) vengono introdotte le definizioni relative agli *spazi topologici* e con grande generalità viene posto il concetto di elemento limite di un aggregato di insiemi ricorrendo al concetto di aggregato gruppale (n. 42) per il quale il prodotto di due insiemi dell'aggregato appartiene ancora ad esso.

Viene poi dato il concetto di funzionale reale continuo e semi continuo definito in un insieme di uno spazio topologico e lo si illustra con esempi adeguati, richiamando all'uopo concetti e risultati fondamentali della teoria delle funzioni di una variabile reale, (funzioni a variazione limitata, curve rettificabili, assoluta continuità, ecc.).

Si passa poi a considerare gli spazi di funzioni per i quali vengono dimostrati, generalizzati ed invertiti i teoremi di Giulio Ascoli-L. Arzelà per le funzioni reali o complesse di più variabili di un aggregato continuo compatto, assumendo come definizione di intorno oltre quella di intorno lagrangiano di ordine zero, anche quella di intorno di ordine ν (n. 28, 61).

Nel Cap. I viene anzitutto dato il fondamentale teorema di M. Fréchet (n. 62) dell'esistenza dell'estremo per un funzionale semicontinuo in un insieme compatto, ciò che riduce l'analisi dell'esistenza dell'estremo di un funzionale in un dato insieme alla dimostrazione della compattezza di questo insieme e della semicontinuità del funzionale.

Come applicazione sono considerati gli integrali del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria e principalmente gli integrali

$$(*) \qquad \int_a^b f(x, y, y', \dots, y^{(n)})dx$$

con f continua nello strato $a \leq x \leq b$, $|y^{(i)}| < \infty$, $(i = 0,1, \dots, n)$, per i quali viene dimostrata la continuità di ordine n e conseguentemente l'esistenza degli estremi in particolari insiemi di funzioni, dei quali si dimostra la compattezza.

È anche preso in esame il teorema di L. Tonelli della continuità di ordine zero dei funzionali $\int_a^b f(x, y, y')dx$, e più in generale la continuità di ordine $n-1$ per i funzionali (*), quando la f oltre a soddisfare determinate ipotesi qualitative dipenda anche linearmente dalla variabile $y^{(n)}$.

Sono del pari studiati gli integrali $\iint_D f(x, y, z, p, q)dxdy$ nel caso della continuità di primo ordine (n. 72).

In alcuni dei casi considerati vengono indicati procedimenti costruttivi delle estremanti, delle quali il calcolo non può conseguirsi con gli ordinari metodi euleriani, mentre in altri il problema viene posto al lettore (nn. 66, 67, 68, 71). Riteniamo utile richiamare l'attenzione dei cultori di Calcolo delle Variazioni su questo argomento di ricerca, perchè la fisica e la tecnica chiedono all'analista metodi effettivi per il calcolo degli estremi e delle estremanti.

Vien condotto un approfondito studio dello spazio delle curve rettificabili per le quali sono date preliminarmente le proprietà salienti del tipo di Hilbert, e successivamente stabiliti teoremi di esistenza in problemi di Calcolo delle Variazioni e considerate notevoli applicazioni, in particolare nel problema delle geodetiche (n. 81).

Viene anche data la definizione di integrali di Weierstrass (n. 84) che fornisce attualmente come dice L. TONELLI [1] « il solo strumento che permetta di costruire una teoria soddisfacente per l'integrazione nel Calcolo delle Variazioni » negli spazi astratti, e in certe condizioni, ne è dimostrata la semicontinuità.

Nel Cap. II, dedicato allo studio degli spazi astratti metrizzabili, sono esaminate le metriche di LAGRANGE, di HILBERT, di FRÉCHET e stabiliti i relativi teoremi di compattezza. Successivamente, premesse alcune nozioni sulle forme hermitiane, si passa allo studio approfondito dello spazio di HILBERT e al problema dell'approssimazione lineare in detto spazio e pertanto vengono considerati gli sviluppi in serie di FOURIER secondo un sistema ortogonale e normale e dimostrati i teoremi generali di convergenza in media del secondo ordine ad essi pertinenti.

Largo posto trova lo studio di una notevole classe di funzionali, i polinomiali

$$P[f] = u_0 + \sum_{\nu=1}^{n} \int_{A^{(\nu)}} K_\nu(t_1, t_2, \dots, t_\nu) f(t_1) f(t_2) \dots f(t_\nu) dt_1 dt_2 \dots dt_\nu$$

i quali rappresentano nel continuo le funzioni razionali intere di grado n in infinite variabili, e sono assai importanti per la loro connessione con la teoria delle equazioni integrali lineari e non lineari.

Per tali funzionali, suscettibili di approfondimenti, si dimostra la loro continuità sia nella metrica di HILBERT che in quella di FRÉCHET, e vien stabilito un notevole teorema di esistenza di estremo nella sfera di HILBERT (n. 133) cioè nella totalità delle funzioni di cui l'integrale del quadrato è limitato. A tale risultato si perviene dimostrando la compattezza della sfera suddetta nella metrica di FRÉCHET. Dedotta col classico metodo di EULERO (n. 135) l'equazione delle estremali di un polinomiale, che viene ad essere un'equazione integrale non lineare se il grado del polinomio è maggiore di due, dal teorema di esistenza ricordato seguono teoremi di esistenza per le soluzioni di tale equazione, assai precisi nel caso omogeneo (n. 139).

Vengono poi diffusamente studiati i problemi di LAGRANGE per detti funzionali, i quali sono ricondotti ad equazioni integrali di prima e di seconda specie (n. 141), ed infine si arriva ad una dimostrazione del teorema di FRÉCHET-GATEAU (n. 142) sull'approssimazione dei funzionali *continui* nello spazio delle funzioni reali continue ed equilimitate in un dominio rettangolare limitato che costituisce una estensione al campo funzionale del classico teorema di WEIERSTRASS sull'approssimazione delle funzioni continue con polinomi.

Il Cap. III è dedicato allo studio degli integrali $\int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx$ nell'indirizzo tradizionale di L. EULERO e J. L. LAGRANGE, che nel 1904, nel trattato di O. BOLZA « *Lectures on the Calculus of Variations* », ebbe un primo assetto soddisfacente.

Sono con grande precisione e diffusamente studiate le condizioni necessarie di EULERO (n. 145), di WEIERSTRASS (n. 151), di LEGENDRE (n. 152) e di JACOBI (nn. 144, 154, 157), e viene riportato l'esempio di C. CARATHÉODORY (n. 159) col quale viene dimostrata l'insufficienza di esse per l'esistenza del minimo forte, mentre invece se ne mostra la sufficienza per il minimo debole e per il minimo ad inclinazione limitata, facendo uso di una notevole disuguaglianza di E. PICARD

[1] L. TONELLI, *L'Analisi Funzionale nel Calcolo delle Variazioni*, Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa, (2), 9 (1940), p. 302.

(n. 160) per il caso dei problemi di minimo debole, e introducendo la partizione di E. E. LEVI (n. 162) della variazione di un funzionale per pervenire al teorema di J. W. LINDBERG-E. E. LEVI (n. 163) che dà una condizione sufficiente nei problemi ad inclinazione limitata.

Sono infine anche date condizioni per il minimo forte, prima relativamente ai particolari funzionali del tipo $\int_a^b f(x, y')dx$ (n. 164), e successivamente per il caso generale, per il quale si dimostra un notevole teorema di E. E. LEVI (n. 169). È da notare che per l'integrale nel quale la f non dipende da y, vien data, sembra per la prima volta, una condizione necessaria e sufficiente perchè una estremale fornisca un estremo assoluto e sono determinate le eventuali estremali verificanti queste condizioni.

Il Cap. IV, redatto assieme al successivo da A. GHIZZETTI, reca il titolo « Tecnica euleriana del Calcolo delle Variazioni » ed è dedicato alla deduzione delle equazioni differenziali di EULERO nei vari problemi di Calcolo delle Variazioni per gli integrali in forma ordinaria. Ammessa l'esistenza delle estremanti, che esse siano interne al campo in cui sono definiti i funzionali, e abbiano opportune proprietà differenziali, vengono dedotte le condizioni di EULERO per i problemi ad estremi liberi o vincolati a muoversi su date curve, per i problemi di MAYER (n. 174) e di LAGRANGE (n. 178) e ne sono fatte varie applicazioni. È considerata infine l'equazione di EULERO per gli integrali doppi.

L'ultimo capitolo è una suggestiva applicazione dei concetti esposti nel precedente alla teoria matematica della elasticità. Si deducono le equazioni dell'equilibrio e delle vibrazioni dei vari sistemi elastici (corda, asta, membrana, piastra, trave) come equazioni di EULERO rispettivamente dell'integrale esprimente l'energia potenziale elastica e di quello di HAMILTON, applicando a tale scopo i noti principi variazionali della Fisica Matematica.

E vogliamo concludere con l'augurio che il chiarissimo Autore con la materia già in gran parte esposta in questo volume e in quello di « Analisi Funzionale lineare » già ricordato, voglia darcene ora uno a stampa dedicato all'Analisi Funzionale e alle sue applicazioni, cui debbano riferirsi i giovani che desiderano muoversi nei più recenti e fecondi campi dell'analisi moderna.

GIOVANNI SANSONE

F INSOLERA: *Trattato di Scienza attuariale*, TEORICA DELLA CAPITALIZZAZIONE. G. Einaudi Editore, Torino, 1949.

In quest'opera l'A. si è preoccupato di abbracciare in una visione generale d'insieme il vasto campo che è proprio della Scienza attuariale, con la costruzione, come nelle Scienze esatte, di un sistema generale logico-deduttivo, inteso alla valutazione quantitativa delle operazioni proprie di tale Scienza, ponendo a fondamento della medesima, quello che l'A. chiama « il principio genetico del reddito da capitali », e due postulati, che rispecchiano in sintesi le più importanti caratteristiche qualitative, di natura squisitamente economica, dei fattori « denaro » e « interesse ». In tal guisa l'A. è riuscito a costruire una teoria generale della capitalizzazione, che inquadri in un tutto connesso le varie operazioni proprie della Scienza attuariale; assumendo come elemento dottrinale primigenio la *forza d'interesse*, e ciò a differenza di altri Autori, che assumono come punto di partenza del sistema dottrinale logico-deduttivo della capitalizzazione, le *fun-*

zione-montante. Tale compito viene dall'A. assolto esaurientemente nella prima parte dell'opera, divisa in quattro capitoli.

Il Capitolo I° è appunto dedicato alle basi economiche della capitalizzazione nel senso testé accennato. Nel capitolo II°, premesse opportune definizioni e stabilita, in base al principio genetico del reddito, l'espressione generale della *funzione-montante*, l'A. passa in rassegna leggi, sistemi e regimi di capitalizzazione più notevoli; anche nei riflessi delle applicazioni pratiche, soffermandosi, in particolar modo, sulle operazioni di capitalizzazione e di sconto. Dopo di che, l'A. offre una visione sintetica di *tutte* le operazioni finanziarie che scaturiscono dai principi precedenti, vale a dire tanto delle operazioni di puro credito, quanto delle operazioni di previdenza; e ciò è quello che di meglio si possa desiderare in una trattazione prettamente scientifica. Brevemente: l'Insolera riconduce le operazioni di capitalizzazione a tre tipi elementari di operazioni: nel primo dei quali, detto anche *prestito elementare*, rientrano più o meno direttamente tutte le varie operazioni di credito; mentre dal secondo e terzo tipo ripetono la loro origine, diretta o indiretta, le operazioni di previdenza, e precisamente: dal secondo le varie operazioni di assicurazione in caso di vita o di capitale differito; dal terzo le diverse operazioni di assicurazione temporanea per il caso di morte.

Nel capitolo III°, dopo opportune considerazioni generali sul principio di equivalenza, non sempre adoperato come espressione di uno stesso concetto, l'A. si sofferma in modo particolare sopra quella che egli chiama equivalenza *tecnica*, che risulta indipendente da un riferimento esplicito alle parti contraenti in una data operazione finanziaria, e il cui concetto poggia su due fattori: premesse tecniche e conseguenze finanziarie. Tale concetto viene stabilito in una precisa e chiara definizione del più ampio significato finanziario, in quanto è applicabile non solo a un'equivalenza fra operazioni di puro credito, ma anche a un'equivalenza fra operazioni assicurative, come pure a equivalenze fra operazioni creditizie e operazioni attuariali. Noto in particolar modo le interessanti applicazioni del principio in parola all'equivalenza fra il sistema di capitalizzazione semplice e ogni altro sistema di capitalizzazione composta, come pure all'equivalenza fra tassi d'interesse in diversi sistemi o nello stesso sistema di capitalizzazione. Si chiude questo capitolo sulle equivalenze con un appropriato confronto fra i sistemi di capitalizzazione semplice e composta a tasso costante, illustrato opportunamente da considerazioni analitico-geometriche.

Nel capitolo IV°, una volta fissati i concetti fondamentali di *montanti omogenei* e del relativo *principio di omogeneità*, viene trattata in modo esauriente e affatto generale la questione della scindibilità per prodotto e per somma di una funzione-montante: dalla scindibilità per prodotto discendendo come caso particolare la scindibilità nel senso di Cantelli. La distinzione fra montanti omogenei e non omogenei (*eterogenei*), è specialmente utile, come afferma giustamente l'A., « ai fini chiarificatori delle applicazioni finanziarie dei concetti di scindibilità per prodotto e di scindibilità per somma ».

Mentre la prima parte dell'opera è dedicata esclusivamente alle operazioni di puro credito, la seconda parte, divisa essa pure in quattro capitoli, è dedicata alle operazioni assicurative, che trovano la loro genesi nel secondo e terzo tipo di schemi elementari già accennati nel capitolo II° della prima parte. Così le operazioni assicurative di fronte alle operazioni di puro credito acquistano, in un certo senso, carattere di generalizzazione; in quanto al fattore puramente finanziario di queste, viene aggiunto nelle assicurative un fattore demografico agli effetti della capitalizzazione. Nel capitolo I° con i concetti di capitalizzazione attuariale, di base tecnica e di forza attuariale, vengono poste solide basi alla Scienza attuariale propriamente detta, che trova, nelle linee essenziali, il suo sviluppo nei due capitoli seguenti, II° e III°, dedicati rispettivamente alle forme principali di assicurazione individuale e di assicurazione collettiva su gruppi di teste.

Il capitolo IV° ed ultimo della seconda parte concerne la disposizione delle tavole finanziarie e il loro uso nella pratica del calcolo numerico; insistendo in modo particolare sulla interpolazione lineare, la quale, mediante un'opportuna correzione del risultato, acquista un grado di approssimazione non inferiore a quello conseguito mediante interpolazione quadratica. Naturalmente in questi calcoli numerici ha una particolare importanza la conoscenza di un confine superiore dell'errore di approssimazione, il quale viene dall'A. messo in luce con un duplice procedimento geometrico e analitico. Il capitolo IV° si chiude con quattro tavole: due finanziarie e due attuariali, che servono a famigliarizzare lo studioso sul modo di usare le tavole stesse; valendo, ben si intende, per quanto riguarda la natura, la portata e l'uso delle tavole attuariali, considerazioni analoghe a quelle concernenti l'uso delle tavole finanziarie.

In due appendici, alla fine dell'opera, l'A. ha voluto dare un orientamento scientifico ad alcune operazioni a breve scadenza (anticipazione su titoli, cambi e arbitraggi di cambio) con particolare riguardo alle operazioni di Borsa, trattate queste ultime anche con i metodi della Geometria analitica, che conferiscono perspicace chiarezza alla esposizione.

Concludendo: l'A., guidato da lunga e larga esperienza didattica e professionale, è riuscito a dare in quest'opera una organica sistemazione dottrinale alla teoria della capitalizzazione, presentando agli studiosi italiani un trattato, che concorre molto efficacemente a porre la Scienza attuariale tra i capitoli più interessanti della Matematica applicata.

L'opera dell'Insolera è da raccomandarsi in modo particolare a tutti coloro che intendono dedicare seriamente i loro studi ad un campo così importante e suggestivo di ricerche, quale è quello che abbraccia le svariatissime questioni di carattere economico-finanziario.

C. A. DELL'AGNOLA

Scritti Matematici di Giacomo Candido, raccolti e ordinati per incarico del figlio Francesco dai proff. Enea Bortolotti ed Enrico Nannei. - Casa Editrice Marzocco, Firenze, 1948, pp. XV + 802. (Edizione fuori commercio).

L'incarico di raccogliere in un volume gli scritti matematici di Giacomo Candido fu affidato dalla Famiglia al prof. Enea Bortolotti. Dopo la dolorosa immatura scomparsa del Bortolotti, il figlio di Giacomo Candido, Francesco affidava l'incarico al prof. Nannei che riprendeva il lavoro che il Bortolotti aveva appena iniziato.

In un bel volume, corredato di un cenno biografico e di un ritratto, sono raccolte le opere del Candido nei seguenti gruppi: Geometria elementare; Geometria del triangolo; Aritmetica elementare, teoria dei numeri e analisi indeterminata; Algebra in generale e trigonometria; Le identità; Equazioni algebriche speciali; Funzioni di Lucas; Geometria differenziale; Storia; Recensioni.

In questa Raccolta, come rileva lo stesso Nannei nella prefazione, appaiono ripetizioni ed anche esposizioni di cose già precedentemente note. Il Nannei non si preoccupò di ciò poichè volle presentare l'opera del Candido quale essa fu, cioè opera prevalentemente di divulgazione della cultura matematica nella nostra Scuola media.

La morte colse il Candido quando accudiva ad un lavoro sulla celebre Memoria di Abel, per cui aveva raccolto il materiale documentario ma non aveva compiuta la stesura definitiva. Il lavoro fu ricomposto da Ettore Bortolotti e appare anch'esso in questo volume.

MARIO VILLA

N. W. MC LACHLAN: *Theory and application of Mathieu Functions*, [Oxford, Clarendon Press, 1947], pp. IX-401; 42 s.

La ricerca delle soluzioni elementari del problema delle vibrazioni delle membrane di forma ellittica condusse nel 1868 E. MATHIEU a determinare le soluzioni periodiche [*funzioni di Mathieu*] dell'equazione [di *Mathieu*]

$$\frac{d^2y}{dz^2} + [a - 2q \cos 2z]y = 0, \tag{1}$$

con a e q costanti positive. All'equazione più generale

$$\frac{d^2y}{dz^2} + [a - 2q\psi(2z)]y = 0, \tag{2}$$

$$-2q\psi(2z) = -2[\theta_2 \cos 2z + \theta_4 \cos 4z + \ldots],$$

pervenne nel 1877 G. W. HILL nei suoi studi sul moto della luna; la memoria. pubblicata nel 1886, introdusse l'impiego dei determinanti di ordine infinito nell'Analisi.

Le (1) e (2) sono due particolari equazioni a coefficienti periodici, per le quali nel 1883 G. FLOQUET consegui i più significativi teoremi per lo studio in grande delle soluzioni (1), ma importanti problemi della fisica matematica e dell'elettrotecnica, strettamente collegati all'equazione di MATHIEU portarono all'approfondimento sistematico delle soluzioni di questa equazione sul modello di quanto è stato fatto per le funzioni sferiche e le funzioni di BESSEL. Si tratta di ricerche fiorite nella scuola inglese di E. T. WHITTAKER (1912) al quale si debbono con B. SIEGER (1908) le prime equazioni integrali per le funzioni di MATHIEU, ricerche estese poi in più direzioni dal noto specialista di equazioni differenziali E. T. INCE (1915-1939), e coordinate la prima volta nella monografia di M. J. O. STRUTT « Lamésche Mathieusche und verwandte Funktionen in Physik und Technik » (1932).

Alcuni problemi della modulazione delle frequenze nelle radiotrasmissioni trovano una risposta teorico-pratica soddisfacente grazie all'impiego delle funzioni di MATHIEU, e ciò spiega l'interesse che i cultori di matematica applicata portano a queste trascendenti, e l'importanza del volume di N. W. MC LACHLAN. L'A. dichiara nella prefazione che egli vuol rivolgersi unicamente ai tecnici e non vuol scrivere un trattato per i matematici puri, ma questi sono lieti che i tecnici segnalino le questioni che più interessano le applicazioni per illuminare a lor volta i corrispondenti procedimenti esistenziali., semplificandoli ove occorra, e per raffinare i relativi metodi di calcolo numerico.

La prima parte del volume, preceduta da un'accurata introduzione storica, è suddivisa in quattordici capitoli, dedicati allo studio delle soluzioni periodiche della (1) [funzioni di MATHIEU] e delle altre soluzioni da queste linearmente indipendenti [funzioni associate], alla loro normalizzazione in $(0,2\,\pi)$ e ai loro zeri, alla loro rappresentazione analitica particolarmente con serie trigonometriche di FOURIER e con serie di funzioni di BESSEL, e alle formule di approssimazione asintotica.

Il problema basilare è il seguente. fissato nella (1) il parametro reale q, determinare a in modo che essa possieda una soluzione periodica del tipo:

$$y = ce_m(z,\ q) = \cos mz + qc_1(z) + q^2c_2(z) + \ldots,$$
$$[y = se_m(z,\ q) = \operatorname{sen} mz + qs_1(z) + q^2s_2(z) + \ldots]$$

dove il simbolo $ce_m\,[se_m]$ indica il così detto *coseno* [*seno*] *ellittico di ordine* m della variabile z, relativo al valore q del parametro.

Il corrispondente valore $a_m(q)$, $[b_m(q)]$ di a [valore caratteristico, autovalore] per q sufficientemente piccolo ha l'espressione:

$$a_m(q) = m^2 + \frac{1}{2(m^2-1)}\,q^2 + \frac{5m^2+7}{32(m^2-1)^3(m^2-4)}\,q^4 + \ldots;$$

notevole interesse hanno nel piano $(a,\ q)$, $[(b,q)]$ le linee $a = a_m\ (q)$, $[b = b_m\ (q)]$ ai fini della determinazione delle regioni dei punti (a,q), $[(b,q)]$ ai quali corrispondono soluzioni della (1) limitate (stabili).

La seconda parte è suddivisa in cinque capitoli, numerati da 15 a 19 e dedicati alle applicazioni. Nel 15° sono esposte le ricerche dell'A. sull'altoparlante a bobina mobile, e altri studi sulle rettifiche elettromeccaniche, sulla modulazione delle frequenze nelle radiotrasmissioni, e su alcuni sistemi dinamici; il 16° riguarda le vibrazioni delle membrane di forma ellittica, le oscillazioni libere dell'acqua in un lago di forma ellittica, e il moto di un cilindro ellittico in un fluido viscoso; il 17° sulla diffusione elettrica e termica contiene alcuni risultati dell'A. sulla conduzione del calore in un cilindro ellittico; il 18° è dedicato alla propagazione delle onde elettromagnetiche in un tubo, e il 19° alla diffrazione del suono e delle onde elettromagnetiche.

Molti contributi originali sono dovuti all'A. per il collegamento della materia sia nella prima che nella seconda parte.

La scelta dei simboli per indicare le funzioni associate alle funzioni di MATHIEU è stata fatta con opportuni accorgimenti atti ad evitare confusioni con altre classi di funzioni; molti esempi numerici che occupano oltre 22 pagine di testo, una tavola di valori caratteristici, 49 diagrammi, una vasta bibliografia, e la stampa assai accurata rendono il volume interessante e gradito allo studioso.

GIOVANNI SANSONE

Operational methods in applied mathematics di H.S. Carslaw e J.C. Jaeger (Oxford University Press, sec. Edition - 1948).

Il libro, di così notevole importanza per l'applicazione dei moderni metodi operazionali alla risoluzione delle equazioni differenziali che intervengono nei problemi di matematiche applicate, esce in seconda edizione ampliata. Le ag-

(1) Cfr. ad es. G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel Campo Reale, I* (2ª ed., Bologna, 1948), Cap. VI.

giunte riguardano sopratutto: la teoria dei moti impulsivi in Dinamica, con applicazioni elettriche; la deduzione di soluzioni valide per grandi o per piccoli valori del tempo; la teoria delle equazioni alle differenze e alle differenze e differenziali con particolare riguardo ai filtri elettrici; problema di contorno per equazioni differenziali ordinarie; il problema della flessione delle travi e alcuni teoremi sulla trasformazione di Laplace particolarmente usati nelle applicazioni.

L'opera dopo una breve introduzione storica, si svolge in quindici capitoli più tre appendici, la prima delle quali sul teorema di Lerch, la seconda sulle funzioni di Bessel, la terza costituita da una tabella di trasformate di Laplace.

Il primo capitolo riguardante il metodo della trasformata di Laplace per le equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti è seguito da due capitoli dedicati, rispettivamente, alla teoria dei circuiti elettrici e alle applicazioni dinamiche. Il quarto capitolo contiene la trattazione del teorema di inversione della trasformazione di Laplace e l'applicazione del medesimo teorema alla risoluzione delle equazioni differenziali lineari ordinarie a coefficienti costanti. Seguono capitoli fondamentali per i cultori della Fisica matematica.

Il capitolo quinto è dedicato al metodo della trasformata di Laplace per la risoluzione delle equazioni differenziali lineari alle derivate parziali ed è seguito dalle applicazioni al problema della conduzione del calore e alla Dinamica delle vibrazioni dei sistemi continui, nonchè dalle applicazioni idrodinamiche e da quelle alle linee elettriche. Nel capitolo decimo, partendo dalle equazioni di Maxwell per un mezzo uniforme ed isotropo (non contenente superficie di discontinuità nè per il campo elettrico nè per il campo magnetico) si applica la trasformata di Laplace allo studio della propagazione delle onde elettromagnetiche.

Il capitolo decimoprimo è dedicato alle funzioni impulsive, con applicazioni, naturalmente, ai circuiti elettrici. Nel capitolo seguente (dodicesimo), la trattazione riassume carattere più schiettamente analitico e vengono esposti i teoremi generali sulla trasformazione di Laplace; nel decimoterzo, poi, viene fatta una discussione sistematica dei metodi atti alla ricerca di soluzioni valevoli per piccoli o per grandi valori del tempo; alcune di tali soluzioni erano già state applicate in precedenza in esempi isolati.

Di notevole importanza il capitolo quattordicesimo, dedicato a quei particolari sistemi di equazioni differenziali che intervengono principalmente nella Dinamica di sistemi di particelle, o circuiti elettrici accoppiati, nonchè nella teoria dei processi probabilistici a catena, nei quali un sistema deve assumere un certo numero di stati discreti, le transizioni fra i quali sono governate da leggi lineari. Si è condotti, dal metodo usato, allo studio di equazioni alle differenze finite e miste alle differenze e differenziali. Nel capitolo quindicesimo, infine, si prendono in considerazione problemi di contorno per equazoni differenziali lineari alle derivate ordinarie, in relazione al metodo della trasformazione di Laplace. Nel capitolo si dedica particolare attenzione al problema della flessione delle travi.

È forse superfluo, quindi, sottolineare l'importanza e la grande utilità del volume, nel quale la messe di esempi, di problemi, di esercizi è imponente e contribuisce a rendere il libro veramente formatore.

ANTONIO PIGNEDOLI