Bollettino
Unione Matematica Italiana

Enzo Martinelli

Un'osservazione sopra un teorema fondamentale della teoria degl'integrali in una varietà topologica

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.4, p. 348–352.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_4_348_0>

Un' osservazione sopra un teorema fondamentale della teoria degl' integrali in una varietà topologica.

Nota (*) di ENZO MARTINELLI (a Genova).

Sunto. - *Si dà una rapida dimostrazione del teorema esistenziale di* CARTAN-DE RHAM *concernente le forme differenziali con assegnati periodi, nella ipotesi che sia soddisfatta una conveniente proprietà topologica.*

1. L' ambiente geometrico ove si svolgono le considerazioni seguenti, è una varietà topologica connessa M_n, di dimensione n, orientabile, chiusa. Si suppone inoltre M_n di classe $n\,(\geq 2)$. Ciò significa che l' intorno di ogni punto di M_n è rappresentabile biuni-

(*) Il contenuto di questa nota è stato oggetto di una comunicazione tenuta al III Congresso dell' U. M. I. in Pisa, settembre 1948.

vocamente entro una ipersfera di uno spazio euclideo n-dimensionale mediante funzioni ammettenti derivate continue almeno fino all'ordine u, e che l'intera varietà è ricopribile con un numero finito di tali intorni (1).

Consideriamo un sistema fondamentale per i cicli di dimensione p di M_n, costituito dai p-cicli $\Gamma_p^1, \dots \Gamma_p^{R_p}$ ($R_p =$ numero di BETTI di dimensione p di M_n). Diciamo che una forma differenziale esterna ω_p, di grado p, è *integrabile* (o *chiusa*), quando si annulla identicamente il suo differenziale esterno $d\omega_p$.

E. CARTAN ha enunciato (2), e G. DE RHAM dimostrato (3), il teorema seguente: Assegnati R_p numeri reali arbitrari $\tau_1, \dots, \tau_{R_p}$, esiste sempre qualche forma differenziale esterna di grado p, ω_p, con coefficienti univocamente definiti in M_n e di classe ≥ 1, integrabile in M_n, siffatta che i suoi periodi fondamentali coincidano con i numeri assegnati; cioè risulti:

$$\int_{\Gamma_p^i} \omega_p = \tau_i \qquad (i = 1, \dots, R_p).$$

La dimostrazione di DE RHAM di questo fondamentale teorema, è ottenuta risolvendo preventivamente un problema di natura algebrico-combinatoria, che può considerarsi come approssimazione discontinua del problema esistenziale in oggetto, quando si reticoli la varietà M_n; indi passando al caso continuo (4). Il ragionamento è estremamente notevole, ma di necessità molto complesso.

Perciò credo non del tutto inutile il contenuto di questa comunicazione, con la quale faccio vedere che il teorema enunciato può stabilirsi in modo immediato, allorchè si supponga di conoscere in M_n una base per i cicli di dimensione $n - p$ soddisfacente ad una semplice proprietà topologica che si verifica facilmente nei casi elementari.

Preciso più oltre (n. 2) qual'è la proprietà topologica che ammetto. Vorrei invece subito osservare che il concetto sul quale è basata la mia deduzione, è nato da un più diretto approfondimento della idea semplice e geniale di DE RHAM, che — secondo egli dichiara (5) — l'ha anche condotto alla sua completa dimostrazione.

(1) Per maggiori dettagli cfr. p. es.: W. V. D. HODGE, *The theory and application of harmonic integrals*, London (1941), cap. I, § 2; oppure P. BIDAL-G. DE RHAM, « Comm. Math. Helvetici », 19 (1646-47), fasc. 1.

(2) E. CARTAN, « Comptes rendus », 187 (1928), pag. 196.

(3) G. DE RHAM, « Journal math. pures et appl. », 10 (1931), pag. 115.

(4) Una esposizione perfezionata della dimostrazione stessa può leggersi in W. V. D. HODGE, op. cit., pagg. 88-100.

(5) G. DE RHAM, *L'enseignement mathématique*, 35 (1936), pag. 213.

L'idea, in breve, è questa: riguardare una forma differenziale integrabile, per es. di 2° grado e nello spazio ordinario, come il flusso elementare di una corrente elettrica conservativa diffusa nello spazio, e per mente al caso limite (discontinuo) costituito da una corrente d'intensità costante che percorra un circuito filiforme.

2. Indichiamo con $\Delta^1_{n-p}, \ldots, \Delta^{R_p}_{n-p}$ un sistema fondamentale per i cicli di dimensione $n-p$ di M_n, *duale* di quello costituito dai p-cicli $\Gamma_p^1, \ldots, \Gamma_p^{R_p}$, in guisa che gl'indici di KRONECKER delle intersezioni valgano:

$$(\Gamma_p^i, \Delta^j_{n-p}) = \delta_{ij},$$

ove $\delta_{ij} = 0$ per $i \neq j$, $\delta_{ii} = 1$.

Supponiamo Γ_p^j, Δ^j_{n-p} di classe ≥ 1; Γ_p^j, Δ^i_{n-p} aventi in comune effettivamente un solo punto P^i; Γ_p^i, $\Delta^j_{n-p} (i \neq j)$ effettivamente privi di punti comuni. La proprietà topologica che ammettiamo è allora che, al variare del punto $\bar{P}^i$ su Γ^i_p in un intorno γ^i_p abbastanza ristretto del punto P^i, Δ^i_{n-p} possa deformarsi su M_n in un ciclo $\bar{\Delta}^i_{n-p}$ incidente Γ^i_p nel solo punto $\bar{P}^i$, in guisa che due distinti $\bar{\Delta}^i_{n-p}$ non abbiano punti comuni.

La proprietà è facilmente verificabile sopra varietà elementari. Si pensi p. es. ad una superficie torica ove Γ_1 e Δ_1 siano un parallelo e un meridiano; o, più in generale, al modello di una superficie orientabile chiusa di genere g costituito da una ciambella con g buchi e al sistema delle sue retrosezioni; o, più in generale ancora, al prodotto topologico di più superficie orientabili [1].

[1] Osserviamo che la proprietà in oggetto non varrebbe in generale se la varietà M_n non fosse orientabile (come è invece nel nostro caso). Infatti, nella ipotesi di non orientabilità, può accadere che un n-edro indicatore di orientazione, di vertice P^i, trasportato per continuità lungo un ciclo lineare di Δ^i_{n-p}, ritorni in P^i in posizione discorde con quella di partenza. Poichè Δ^i_{n-p} è un $(n-p)$-ciclo orientabile, se si suppone che $n-p$ lati dello n-edro si conservino durante il trasporto tangenti a Δ^i_{n-p}, lo $(n-p)$-edro da essi costituito ritorna in posizione concorde, mentre il p-edro dei rimanenti lati ritorna necessariamente in posizione discorde. Ora quest'ultimo fatto è in contrasto con la possibilità di deformare Δ^i_{n-p} nel modo detto; giacchè, ammessa tale possibilità, si potrebbe ottenere un sistema continuo di p-edri coi vertici nei punti di Δ^i_{n-p}, contenente un preassegnato p-edro di vertice P^i individuato da p spostamenti infinitesimi indipendenti di P^i lungo Γ^i_p. In altri termini, l'esistenza delle varietà deformate $\bar{\Delta}^i_{n-p}$, implica l'orientabilità del tubo n-dimensionale da esse descritto intorno a Δ^i_{n-p}, ciò che del resto può facilmente riconoscersi anche mediante la considerazione dei sistemi di coordinate atti a rappresentare i punti del tubo, sistemi dei quali si discorre più oltre.

Ciò posto, indichiamo con $x^i_1, \dots, x^i_p$ coordinate locali interne in Γ^i_p, atte ad individuare la posizione $\bar{P}^i$ entro γ^i_p, e consideriamo una funzione $f^i(\bar{P}^i) = f^i(x^i_1, \dots, x^i_p)$, del punto $\bar{P}^i$ variabile in γ^i_p, di classe ≥ 1, positiva nell'interno di γ^i_p e annullantesi sul contorno insieme alle sue derivate parziali prime (almeno). La forma differenziale monomia, di grado p,

$$\omega^i_p = f^i(x^i_1, \dots, x^i_p)\, d(x^i_1, \dots, x^i_p), \tag{1}$$

è definita su γ^i_p, ma può pensarsi altresì definita, dall'espressione (1) stessa, in tutto il tubo (o strato) n-dimensionale descritto da $\bar{\Delta}^i_{n-p}$. Infatti, se $\bar{Q}^i$ è un punto variabile su $\bar{\Delta}^i_{n-p}$, che resti però nell'intorno di un determinato punto Q^i di Δ^i_{n-p}, la posizione di $\bar{Q}^i$ può fissarsi mediante le coordinate stesse $x^i_1, \dots, x^i_p$ di $\bar{P}^i$, alle quali si aggiungano altre $n-p$ coordinate indipendenti $x^i_{p+1}, \dots, x^i_n$, arbitrariamente scelte [1]. Vuol dire che le ultime $n-p$ coordinate non appaiono nella definizione della forma differenziale (1) in $\bar{Q}^i$. Ed anzi, assumendo $\omega^i_p = 0$ fuori del tubo n-dimensionale, la forma ω^i_p resta definita in tutta M_n e ivi con coefficienti di classe ≥ 1.

La ω^i_p è altresì integrabile in M_n, giacchè fuori del tubo è zero, e nel tubo risulta:

$$d\omega^i_p = \sum_{1}^{n}{}_k \frac{\partial f^i}{\partial x^i_k} d(x^i_k, x^i_1, \dots, x^i_p) = 0,$$

in quanto per $k \leq p$ si annulla il $(k+1)$-differenziale indicato, e per $k > p$ se ne annulla il coefficiente.

Posto allora

$$\int_{\Gamma^i_p} \omega^i_p = \int_{\gamma^i_p} \omega^i_p = \lambda_i > 0,$$

la forma

$$\omega_p = \sum_{1}^{R_p}{}_i \frac{\tau_i}{\lambda_i} \omega^i_p, \tag{2}$$

risulta definita, integrabile, di classe ≥ 1 in tutta M_n, e risolve il problema esistenziale che ci interessa.

Infatti, poichè, per $i \neq j$, Δ^i_{n-p} non incontra Γ^j_p, del pari accade che, essendo γ^i_p abbastanza ristretto, il tubo n-dimensionale costruito intorno a Δ^i_{n-p} non incontra Γ^j_p. Ne segue che:

$$\int_{\Gamma^j_p} \omega^i_p = 0 \qquad (i \neq j), \tag{3}$$

essendo ω^i_p nulla fuori del tubo.

[1] Per procurarsele basta fissare $n-p$ fasci di varietà $(n-1)$-dimensionali che solchino l'intorno di M_n nel quale varia $\bar{Q}^i$.

Tenendo conto di (2), (3), si ha quindi:

$$\int_{\Gamma^j_p} \omega_p = \sum_{1}^{R_p} \frac{\tau_i}{\lambda_i} \int_{\Gamma^j_p} \omega^i_p = \tau_j,$$

come volevasi.

NOTA. - Nella comunicazione al Congresso dell'U. M. I. citata da principio, avevo espresso la presunzione intuitiva che potesse stabilirsi la validità sopra ogni varietà orientabile M_n della proprietà topologica ammessa (n. 2). In quella occasione B. SEGRE ha invece espresso la presunzione contraria, che si è poi dimostrata quella giusta. Infatti, grazie ed un'osservazione G. ZAPPA, ho potuto costruire esempi di varietà orientabili per le quali la detta proprietà topologica non sussiste. In un lavoro che apparirà prossimamente negli « Annali di Matematica », indico tali esempi e approfondisco il tipo di ragionamento qui presentato, ponendomi in condizioni del tutto generali.