Bollettino Unione Matematica Italiana

Modesto Dedò

Sulle trasformazioni di De Jonquières

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.4, p. 353–359.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_4_353_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1949.

Sulle trasformazioni di De Jonquières.

Nota di Modesto Dedò (a Milano).

Sunto. - *Si determinano le caratteristiche di una trasformazione di De Jonquières, quando siano date, geometricamente, le* ∞^1 *proiettività da essa subordinate tra le rette corrispondenti nei due fasci proiettivi che hanno come sostegni i punti fondamentali multipli.*

1. Recentemente, occupandomi delle trasformazioni geometriche che sono implicite in molti temi di concorso a cattedre nelle scuole medie [1], mi sono trovato a dover rielaborare la teoria delle trasformazioni di De Jonquières, allo scopo di poterla esporre con il minor numero di mezzi possibile. Nel far questo mi sono spesse volte imbattuto in un problema la cui soluzione, pur essendo ovvia nel caso generico, dà luogo ad alcuni casi particolari che vanno riguardati con una certa cautela e conducono a risultati talvolta inaspettati.

[1] M. Dedò, *Sulle trasformazioni quadratiche e su alcuni procedimenti classici in cui esse si presentano implicitamente.* « Periodico di Matematiche », 1949, n. 2.

M. Dedò, *Vari aspetti sotto cui si presentano le trasformazioni quadratiche e legami ad essi relativi.* Ibidem, n. 3.

Ho redatto questa piccola nota pensando che essa risulti utile a coloro cui interessa adoperare le trasformazioni di DE JONQUIÈRES.

2. Una trasformazione di DE JONQUIÈRES J, subordina una proiettività variabile ω_h tra le rette corrispondenti h e h' dei due fasci (proiettivi) che hanno come sostegni i punti fondamentali multipli O (per la J) e O' (per la J^{-1}).

Ci proponiamo qui di risolvere il problema di determinare la configurazione dei punti fondamentali e l'ordine di una trasformazione di De Jonquières J, *quando siano note geometricamente (oltre alla proiettività tra i fasci* O *e* O'*) le* ∞^1 *proiettività* ω_h.

Molto spesso le ∞^1 proiettività ω_h risultano *date mediante tre coppie di curve corrispondenti* a_1, a_1'; a_2, a_2'; a_3, a_3' (²) *unisecanti le rette dei due fasci* O e O', così che ciascuna proiettività ω_h risulta definita da tre coppie di punti corrispondenti A_{h1}, A'_{h1}; A_{h2}, A'_{h2}; A_{h3}, A'_{h3}.

Se poi la trasformazione J è centrale (cioè fra piani sovrapposti, con i punti fondamentali O e O' coincidenti e tale che la proiettività tra i due fasci O e O' sia l'identità) le ω_h possono anche esser date *mediante una coppia di curve corrispondenti unisecanti* a *e* a' *e una curva unita bisecante* u, così che ciascuna proiettività ω_h risulta definita da una coppia di punti corrispondenti A_h e A'_h e dai punti uniti U_1 e U_2 (³).

Se infine la J è centrale e involutoria, le involuzioni ω_h possono esser date o *mediante due bisecanti*, così che ciascuna ω_h risulta definita da due coppie di punti coniugati; oppure *mediante una curva unita bisecante*, così che ciascuna ω_h risulta definita dai suoi punti uniti (⁴).

3. Supponiamo ora di avere *una trasformazione di De Jonquières* J *centrale* (⁵), *definita da tre coppie di curve corrispondenti* a_1, a_1'; a_2, a_2'; a_3, a_3' *unisecanti le rette del fascio* $\mathrm{O} \equiv \mathrm{O}'$. Su ogni retta h del fascio O, che tagli le curve date in punti *distinti*, risulta definita e non degenere una proiettività ω_h.

(²) Notiamo il caso frequente in cui qualcuna delle curve date sia (di ordine zero) ridotta all'intorno di primo ordine del punto O.

(³) Notiamo il caso in cui la u è una unisecante contata due volte così che le ω_h risultano paraboliche. Frequente è il caso in cui la u è la retta impropria contata due volte e le ω_h risultano traslazioni.

(⁴) Notiamo che ciascuna delle bisecanti può esser spezzata (in due unisecanti).

(⁵) Ci riferiamo ora ad una trasformazione centrale solo per comodità di trattazione.

Consideriamo i punti (fuori di O) comuni a due delle tre curve a_1, a_2, a_3 o delle a_1', a_2', a_3' e indichiamo con F_1 un punto comune ad a_2, a_3 e con F_2, F_3; G_1', G_2', G_3' punti comuni rispettivamente ad a_3, a_1; a_1, a_2; a_2', a_3'; a_3', a_1'; a'_1, a_2'.

In generale [6] sono fondamentali (per la J e per la J^{-1}) le rette h_F e h_G che (da O) vanno ai punti F e ai punti G', in quanto su ciascuna di esse risulta degenere la proiettività ω_h: ad es., sulla retta OF_1, al punto F_1 corrispondono i due punti A'_{h2}, A'_{h3}, in cui OF_1 è incontrata dalle a_2', a_3' e pertanto ad F_1 corrispondono tutti i punti della retta OF_1. Sulla stessa retta OF_1 risulta fondamentale (per la J^{-1}) il punto $F_1' = A'_{h3}$, in quanto esso è corrispondente sia del punto A_{h3} che del punto F_1.

Si ha così modo *di determinare tutti i punti fondamentali e conseguentemente l'ordine* n *della trasformazione* J. Precisamente indichiamo con ν_1, ν_2, ν_3; ν_1', ν_2', ν_3' gli ordini delle curve date. Osserviamo che, ad es., le due curve (unisecanti) a_2 e a_3 hanno (fuori di O) $\nu_2 + \nu_3 - 1$ punti comuni. Tenendo conto che una trasformazione di De Jonquières, di ordine n, ha $2n - 2$ punti fondamentali semplici, otterremo:

$$n = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_1' + \nu_2' + \nu_3' - 2. \tag{1}$$

4. *L'ordine* n *della trasformazione* J, *si può abbassare se le curve precedenti non sono date in modo generico* [7]. Precisamente si abbassa, quando (e solo quando) si verifichi una delle due circostanze seguenti:

a) *Due punti* F_i *e* G_i' (comuni a due curve e alle due corrispondenti) *stanno su una stessa retta* $\bar{h}$ *(del fascio* O*).*

Infatti la proiettività $\bar{\omega}_h$, indotta sulla h, cessa di esser degenere perchè ora ad F_i corrisponde il solo punto G_i'. Pertanto il numero delle rette fondamentali si abbassa di due e *l'ordine della* J *si abbassa di uno* [8].

b) *Le tre curve* a_1, a_2, a_3 *(oppure le* a_1', a_2', a_3'*) passano tutte per uno stesso punto* F^* (con tangenti distinte). Cioè uno dei punti F_1 coincide ora con uno degli F_2 e quindi con uno degli F_3.

Si ha una sola retta fondamentale là dove prima se ne presen-

(6) Risulterà, dal seguito, precisato il senso in cui è qui usata la locuzione « in generale ». Cfr. in particolare la nota (8) alla pagina seguente.

(7) Cfr. la nota successiva (8).

(8) È appena necessario notare che questo caso appare non generale rispetto alla nostra impostazione del problema. Che se invece, supposta data la J, si fissano ad arbitrio le tre curve a_1, a_2, a_3 e si trovano le curve trasformate a_1', a_2', a_3', si ha che, *generalmente*, i punti (a_1, a_2), (a_1', a_2') sono (trasformati uno dell'altro e quindi) allineati con O.

tavano tre. Pertanto il numero delle rette fondamentali si abbassa di due e *l'ordine della* J *si abbassa di uno.*

5. Il presentarsi simultaneamente delle circostanze precedenti a) e b) dà luogo a qualche necessaria precisazione:

I) *Supponiamo che i punti* F_1 *e* G_1' *stiano su una stessa retta* h_1 *e che la curva* a_1 *venga a passare anch'essa per il punto* F_1 *(comune ad* a_2, a_3*).*

In questo caso la retta h_1 è fondamentale, poichè al punto F_1 corrispondono i due punti G_1' e A'_{k1}. Si può vedere che la retta h_1 conta per due rette fondamentali infinitamente vicine, osservando che, delle tre rette OF_1, OF_2, OF_3 che sono venute a coincidere, la sola OF_1 non risulta fondamentale, in quanto passa per G_1'.

Rispetto al caso generale questa circostanza importa l'abbassamento di una sola unità per l'ordine della J: per così dire, è come se, delle due circostanze a) e b) che qui si presentano simultaneamente, una non desse contributo.

II) *Supponiamo che due punti* F^* *e* G'^*, *comuni rispettivamente ad* a_1, a_2, a_3; a_1', a_2', a_3', *stiano su una stessa retta* h^*.

Parrebbe ora che la retta h^* non fosse fondamentale, perchè ad F^* corrisponde soltanto G'^*; se però ricordiamo che (per una qualunque trasformazione puntuale regolare) gli intorni del primo ordine, di due punti corrispondenti regolari, sono proiettivi, siamo portati a concludere che la retta h^* può non essere fondamentale solo quando il birapporto, formato dalla retta h^* con le tangenti in F^* alle curve $a_1\, a_2\, a_3$, risulti uguale al birapporto formato dalla retta h^* con le tangenti in G'^* alle $a_1'a_2'a_3'$. Se tali due birapporti non sono uguali, i punti F^* e G'^* risultano fondamentali (rispettivamente per la J e per la J^{-1}); così che, ad es., al punto F^* corrisponde l'intorno di G'^*. Infinitamente vicino ad F^* vi è un altro punto fondamentale (cui corrisponde la retta h^*). Si hanno pertanto due rette fondamentali (infinitamente vicine) là dove, nel caso generale, se ne presentano sei: *l'ordine della* J *si abbassa quindi di due.*

(Se invece i birapporti suddetti sono eguali, l'ordine della J si abbassa di tre).

6. *È facile verificare analiticamente i risultati precedenti.*

Assumiamo un sistema di riferimento tale che il punto O risulti il punto improprio dell'asse y.

Le curve date a_i e a_i' avranno come equazioni rispettivamente

$$y=\frac{P_i}{Q_i} \qquad \text{e} \qquad y=\frac{P_i'}{Q_i'} \tag{2}$$

dove $i = 1, 2, 3$; P_i, P_i' sono polinomi di ordine ν_i, ν_i'; Q_i, Q_i' sono polinomi di ordine $\nu_i - 1$, $\nu_i' - 1$. Le ∞^1 proiettività ω_k saranno rappresentate da equazioni del tipo

$$\alpha y y' + \beta y + \gamma y' + \delta = 0 \tag{3}$$

dove α, β, γ, δ sono polinomi nella sola x degli ordini rispettivi n, $n-1$, $n-1$, $n-2$, e la J avrà l'espressione analitica

$$\left\{\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= -\frac{\beta y + \delta}{\alpha y + \gamma}. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Possiamo calcolare l'equazione (3) sotto forma di determinante:

$$\begin{vmatrix} yy' & y & y' & 1 \\ P_1P_1' & P_1Q_1' & P_1'Q_1 & Q_1Q_1' \\ P_2P_2' & P_2Q_2' & P_2'Q_2 & Q_2Q_2' \\ P_3P_3' & P_3Q_3' & P_3'Q_3 & Q_3Q_3' \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

da cui risultano immediatamente gli ordini di α, β, γ, δ *e quindi l'ordine* n *della* J.

L'ordine della J *si abbassa quando* α, β, γ, δ *hanno un fattore comune.* Sviluppando in serie, otterremo, per le equazioni (2), le espressioni

$$y = a_{i0} + a_{i1}x + a_{i2}x^2 + \dots \quad \text{e} \quad y = a'_{i0} + a'_{i1}x + a'_{i2}x^2 + \dots \tag{6}$$

e la (5) diventerà:

$$\begin{vmatrix} yy' & y & y' & 1 \\ (a_{10} + a_{11}x\dots)(a'_{10} + a'_{11}x\dots) & a_{10} + a_{11}x\dots & a'_{10} + a'_{11}x\dots & 1 \\ (a_{20} + a_{21}x\dots)(a'_{20} + a'_{21}x\dots) & a_{20} + a_{21}x\dots & a'_{20} + a'_{21}x\dots & 1 \\ (a_{30} + a_{31}x\dots)(a'_{30} + a'_{31}x\dots) & a_{30} + a_{31}x\dots & a'_{30} + a'_{31}x\dots & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

Consideriamo la proiettività ω_0 subordinata sull'asse y; se a_{10}, a_{20}, a_{30} sono diversi fra loro e sono pure diversi fra loro a'_{10}, a'_{20}, a'_{30}, si ha, ovviamente, che la ω_0 è determinata e non degenere. Supponiamo che, ad es., sia $a_{10} = a_{20}$: (con un opportuno riferimento) poniamo $a_{10} = a_{20} = 0$.

Dalla (7) possiamo, in questa ipotesi, calcolare α, β, γ, δ e otteniamo:

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= a_{30}(a'_{10} - a'_{20}) + xA \\ \beta &= -a_{30}a'_{30}(a'_{10} - a'_{20}) + xB \\ \gamma &= xC \\ \delta &= xD \end{aligned}\right. \tag{8}$$

dove A, B, C, D indicano sviluppi in serie, nella variabile x, che per ora non precisiamo.

Possiamo ora verificare che si stacca il fattore x (e la J si abbassa di ordine), quando (e solo quando) si verifichi una delle due circostanze:

a) Se $a'_{10} = a'_{20}$, cioè sull'asse y si incontrino, oltre alle due curve a_1 e a_2, anche le due curve a'_1 e a'_2.

b) Se $a_{30} = 0$, cioè le tre curve a_1, a_2, a_3 passino tutte per uno stesso punto dell'asse y (l'origine).

Risulta cioè verificato quanto abbiamo stabilito al n. 4.

Supponiamo ora che sia $a_{10} = a_{20} = a_{30} = 0$ e calcoliamo le espressioni A. B, C, D, che compaiono nelle (8); si ha:

$$(9)\qquad \begin{cases} A = \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{10} & 1 \\ a_{21} & a'_{20} & 1 \\ a_{31} & a'_{30} & 1 \end{vmatrix} + xA_1 \\[2ex] B = \begin{vmatrix} a_{11}a'_{10} & a'_{10} & 1 \\ a_{21}a'_{20} & a'_{20} & 1 \\ a_{31}a'_{30} & a'_{30} & 1 \end{vmatrix} + xB_1 \\[2ex] C = xC_1 \\ D = xD_1 \end{cases}$$

Si può verificare che i due determinanti che compaiono nelle formule precedenti (9), non possono essere entrambi nulli, se a_{11}, a_{21}, a_{31} sono fra loro distinti (il che noi supponiamo perchè, per ora, escludiamo che le curve a_1, a_2, a_3 abbiano dei contatti) e se sono fra loro distinti a'_{10}, a'_{20}, a'_{30}. Supponiamo allora che sia $a'_{10} = a'_{20}$: (con un opportuno riferimento) poniamo $a'_{10} = a'_{20} = 1$. Si stacca un ulteriore fattore x (e la J si abbassa di grado) quando e solo quando (nell'ipotesi che non vi siano contatti) è anche $a'_{30} = 1$ In tal caso possiamo calcolare A_1 e otteniamo:

$$(10)\qquad A_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{11} & 1 \\ a_{21} & a'_{21} & 1 \\ a_{31} & a'_{31} & 1 \end{vmatrix} + x A_2 .$$

Appare immediatamente che il determinante precedente è nullo solo se sono uguali i due rapporti semplici $(a_{11}a_{21}a_{31}) = (a'_{11}a'_{21}a'_{31})$. *Risulta così verificato quanto abbiamo stabilito al n. 5.*

7. Finora è stata esclusa l'ipotesi che le curve a_1, a_2, a_3 o le a'_1, a'_2, a'_3 avessero dei contatti. Tale ipotesi non conduce a fatti sostanzialmente nuovi rispetto a quelli fin qui esposti. È appena necessario ricordare che van tenuti nel debito conto gli ordini di molteplicità e che la condizione di regolarità per una coppia di punti corrispondenti P e P', è che le configurazioni differenziali formate in P e in P' dalle curve a_1, a_2, a_3 e dalle a'_1, a'_2, a'_3, siano proiettivamente uguali. Vogliamo ancora ricordare che le tre curve a_1, a_2, a_3 possono anche avere dei contatti nel punto fondamentale O (quando qualche punto fondamentale F_t capita infinitamente vicino ad O) e che questo caso si verifica in particolare quando qualcuna delle tre curve sia (di ordine zero) ridotta all'intorno del primo ordine del punto O.

8. Quando le ω_k sono date in uno degli altri modi enunciati al n. 2, si procede analogamente a quanto abbiamo fin qui fatto:

a) *La* J *sia definita da una curva unita bisecante* u *(di ordine μ) e da una coppia di unisecanti corrispondenti* a *e* a' *(degli ordini rispettivi ν e ν).*

Sono, in generale, fondamentali le rette che da O vanno ai punti in cui le a e a' incontrano la u.

L'ordine n della J risulta:

(11) $$n = \mu + \nu + \nu' - 1.$$

Tale ordine si abbassa se le curve a, a *si incontrano sulla* u.

b) *La* J *sia involutoria e definita da due bisecanti* b_1 *e* b_2 (degli ordini rispettivi β_1 e β_2).

Sono, in generale, fondamentali le rette che da O vanno ai punti F comuni a b_1 e b_2.

L'ordine della J risulta:

(12) $$n = \beta_1 + \beta_2 - 1.$$

Tale ordine si abbassa se due punti F *sono allineati con* O.

Questo caso rientra nel caso generale, se le due bisecanti sono spezzate in due coppie di unisecanti $a_1 a'_1$, $a_2 a'_2$ (pur di assumere, ad es., come terza coppia di unisecanti $a_3 = a'_1$, $a'_3 = a_1$) [9].

c) *La* J *sia involutoria e definita da una curva unita bisecante* u (di ordine μ).

Sono fondamentali le tangenti alla u, condotte da O.

L'ordine della J risulta

(13) $$n = \mu.$$

Questo caso rientra nel caso a) pur di assumere, come unisecanti corrispondenti, l'intorno del primo ordine del punto O e la polare (prima) di O rispetto ad u.

[9] Si dovrà tener conto che i punti $(a_1 a_3)$ e $(a_1' a_3')$ coincidono.