Bollettino
Unione Matematica Italiana

Guido Vaona

Curve e superficie quasi-asintotiche della varietà di Grassmann che rappresenta le rette di uno spazio lineare

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.4, p. 360–367.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_4_360_0>

Curve e superficie quasi-asintotiche della varietà di Grassmann che rappresenta le rette di uno spazio lineare.

Nota di GUIDO VAONA (a Bologna).

Sunto. - *Si determinano e caratterizzano geometricamente le curve quasi-asintotiche* γ_{12}. γ_{13} *e le superficie quasi-asintotiche* $\sigma_{12}{}^{q}$ ($q = 1, 2, 3$) *della varietà di Grassmann che rappresenta la totalità delle rette di uno spazio lineare.*

1. Recentemente il prof. VILLA, in una delle sue comunicazioni al II Congresso della Società Matematica Austriaca (Innsbruck, settembre 1949), si è trattenuto fra l'altro sull'interesse della ricerca delle curve e delle varietà quasi-asintotiche delle varietà di GRASSMANN e di altre ricerche che ad essa si connettono.

In questa Nota espongo appunto alcuni risultati riguardanti le quasi-asintotiche della varietà di GRASSMANN che rappresenta le rette di uno spazio lineare S_n, riservandomi di ritornare sull'argomento in altro lavoro.

Più precisamente nel presente lavoro determino le curve quasi-asintotiche γ_{12} e γ_{13} (nn. 3, 4) e le superficie quasi-asintotiche $\sigma_{12}{}^{q}(q = 1, 2, 3)$ (n. 5) della grassmanniana delle rette [1]. Di esse dò caratterizzazioni geometriche che le pongono in relazione assai semplice colle corrispondenti superficie e V_3 rigate di S_n. Queste caratterizzazioni lasciano intravvedere l'esistenza di interessanti legami fra le varietà quasi-asintotiche delle grassmanniane e i ca-

[1] Il concetto di varietà quasi-asintotica, appartenente ad una varietà, è dovuto al BOMPIANI; si veda ad es. BOMPIANI, *Recenti progressi nella geometria proiettiva differenziale degli iperspazi*, « Proceed. of the fifth Int. Congress of Mathem. », Cambridge (1912), vol. II, p. 24.

Una varietà V_h, *appartenente ad una varietà* V_k, *si dice quasi-asintotica* σ^{q}_{rs} $(0 < r < s)$ *per* V_k, *quando l'* $S(r)$*-osculatore a* V_k *in un punto generico di* V_h *e l'* $S(s)$*-osculatore ivi alla* V_h *hanno uno spazio congiungente di dimensione inferiore all'ordinario.*

La *specie q* di una V_h quasi-asintotica ($h > 1$) è un carattere proiettivo, introdotto dal VILLA, dipendente dalla dimensione dello spazio congiungente gli spazi osculatori di cui alla definizione. Si veda: VILLA, *Sulle superficie quasi-asintotiche della* $V_4{}^{6}$ *di* S_8 *che rappresenta le coppie di punti di due piani*, « Rend. Acc. d'Italia », ser. VII, vol. I, p. 229 (1940).

ratteri di sviluppabilità delle corrispondenti varietà luoghi di spazi da esse rappresentate.

I risultati ottenuti porgono anche un nuovo esempio di varietà che posseggono superficie quasi-asintotiche σ_{12} di tutte tre le specie (2).

2. *Equazioni parametriche della varietà di Grassmann rappresentativa delle rette di* S_n .

È ben noto che le rette di uno spazio lineare S_n vengono rapsentate biunivocamente, senza eccezioni, dai punti di una varietà algebrica razionale W (*varietà di Grassmann*) di dimensione $t=2(n-1)$, di ordine $\frac{[2(n-1)]!}{(n-1)!\,n!}$, di uno spazio lineare $S_\rho\left[\rho=\binom{n+1}{2}-1\right]$. Nello spazio S_ρ, di coordinate proiettive omogenee p_{ij} $(i, j=0, 1, \dots, n;$ $i<j)$, W risulta intersezione completa delle $\binom{n+1}{4}$ quadriche di equazioni

$$p_{ij}p_{hk}-p_{ih}p_{jk}+p_{ik}p_{jh}=0 \tag{1}$$
$$(i,\ j,\ h,\ k=0,\ 1, \dots,\ n;\ i<j<h<k).$$

Una rappresentazione parametrica di W, che useremo in seguito, è indicata in una classica Memoria del SEVERI (3). Se delle equa-

(2) Mentre è stata molto sviluppata la teoria delle curve quasi-asintotiche, ad opera sopratutto del BOMPIANI e del VILLA, poco è stato fatto finora sulle superficie e varietà quasi-asintotiche. Esempi notevoli ed interessanti sono stati dati dal VILLA. Si vedano oltre al lavoro cit. nella (1) i seguenti lavori: *Sull'annullarsi, in un punto, della matrice Jacobiana di* m *funzioni in* n *variabili*, « Rend. Acc. d'Italia », ser. VII, vol. III, p. 209 (1942); *Sulle trasformazioni puntuali degeneri*, « Memorie Acc. di Bologna », ser. IX, vol. IX, p. 19 (1942); *Superficie della* V_4^6 *di Segre e relative trasformazioni puntuali*, « Memorie Acc. di Bologna », ser. IX, vol. IX, p. 143 (1942); *Sulle direzioni caratteristiche di una trasformazione puntuale*, « Memorie Acc. di Bologna », ser. IX, vol. X, p. 7 (1943). In tali lavori l'A. determina alcune classi di superficie e varietà quasi-asintotiche σ_{12} e σ_{13} delle varie specie, appartenenti alla varietà di Segre che rappresenta le coppie di punti di due spazi lineari, caratterizzandole geometricamente in relazione alle corrispondenti trasformazioni puntuali. Un altro esempio è offerto dal BOGDAN (*Sopra una classe di* V_3 *che ammettono una infinità di superficie quasi-asintotiche dipendente da una funzione arbitraria*, « Rend. Acc. dei Lincei », ser. VI, vol. XXVII, p. 62, 1938) il quale determina analiticamente le superficie quasi-asintotiche $\sigma_{12}{}^1$ di una classe di V_3 costruite partendo dalla superficie di Veronese. Recentemente il LONGO (*Sopra una classe di varietà che ammettono varietà subordinate quasi-asintotiche*, « Rend. Acc. dei Lincei », ser. VIII, vol. V, p. 19, 1948) ha esteso l'esempio dato dal BOGDAN.

(3) Si veda: SEVERI, *Sulla varietà che rappresenta gli spazî subordinati di data dimensione, immersi in uno spazio lineare*, « Annali di Matema-

zioni (1) si considerano le $\binom{n-1}{2}$ ottenute ponendo $i=0$, $j=1$, ossia le

(2) $$p_{01}p_{hk} - p_{0h}p_{1k} + p_{0k}p_{1h} = 0 \qquad (h,\ k = 2,\ 3, \ldots,\ n;\ h<k),$$

si ottiene la rappresentazione di una varietà $W+M$ che si spezza nella grassmanniana W e in una varietà M appartenente all'iperpiano $p_{01}=0$. Risolvendo le (2) rispetto a p_{hk}, avendo posto $p_{01}=1$, $p_{0g}=u_g$, $p_{1m}=u_{m+n-1}$, si ha la seguente rappresentazione parametrica di W

(3) $$\begin{aligned} p_{01} &= 1 \\ p_{0g} &= u_g \\ p_{1m} &= u_{m+n-1} \\ p_{hk} &= \begin{vmatrix} u_h & u_k \\ u_{h+n-1} & u_{k+n-1} \end{vmatrix} \quad (h,\ k,\ g,\ m = 2,\ 3, \ldots,\ n; \quad h<k). \end{aligned}$$

Si osservi che, avendo tolto l'omogeneità ponendo $p_{01}=1$, le (3) non rappresentano i punti di M e contemporaneamente i punti di W dell'iperpiano $p_{01}=0$. Apparirà evidente che tale particolarità non lede la generalità dei problemi trattati in seguito.

3. *Curve quasi-asintotiche* γ_{12} *di* W.

La varietà W possiede una infinità di curve quasi-asintotiche γ_{12}, dipendente da funzioni arbitrarie, che si possono assai semplicemente caratterizzare ponendole in relazione alle superficie rigate di S_n che esse rappresentano. Si ha:

Le curve quasi-asintotiche γ_{12} *della varietà di Grassmann che rappresenta le rette di* S_n *sono tutte e sole le curve che sono immagini di superficie rigate sviluppabili, o in particolare di coni e rigate piane.*

È intanto evidente che fra le quasi-asintotiche γ_{12} di W figurano le curve tracciate sugli spazi lineari appartenenti a W, che sono immagini o di coni o di rigate piane ([4]). Viceversa ogni cono o rigata piana è rappresentato da una di quelle curve. Esclusi questi casi, dimostriamo che ogni quasi-asintotica γ_{12} è immagine di una rigata sviluppabile e viceversa.

tica », ser. III, vol. XXIV, pp. 106-107 (1915). A questa Memoria rimandiamo per le proprietà fondamentali delle grassmanniane.

([4]) Gli unici spazi lineari giacenti su W sono gli ∞^n S_{n-1}, immagini ciascuno delle rette di S_n passanti per un punto, e gli $\infty^{3(n-1)}$ piani, immagini dei piani rigati di S_n. Si veda ad. es.: TERRACINI, *Las variedades de Grassmann y las ecuaciónes en derivadas parciales de primer orden en el caso de mas variables independientes*, « Revista de Mat. y Fís. teór. de la Univ. Nac. de Tucumán », vol. IV, p. 368 (1944).

Sia γ una curva di W (non appartenente ad uno spazio lineare di W) rappresentata dalle (3) dove si ponga

$$u_r = u_r(\tau) \qquad (r = 2, 3, \dots, 2n-1). \tag{4}$$

Affinchè γ sia quasi-asintotica γ_{12} occorre e basta che siano nulli tutti i minori di ordine massimo estratti dalla matrice le cui righe sono costituite dalle coordinate di un punto P generico di γ, dei punti derivati primi di P su W e del punto derivato secondo di P su γ. Si trova che le $u_r(\tau)$ devono soddisfare le equazioni differenziali

$$u'_{g+n-1} = \lambda u'_g \qquad (g = 2, \dots, n), \tag{5}$$

dove gli apici indicano derivazione rispetto a τ e λ è una funzione di τ, per le ipotesi fatte, non identicamente nulla. D'altra parte la rigata di S_n rappresentata da γ è il luogo delle rette congiungenti i punti A e B di coordinate omogenee

$$A(0, 1, u_2, u_3 \dots, u_n); \qquad B(-1, 0, u_{n+1}, u_{n+2}, \dots, u_{2n-1}), \tag{6}$$

e quindi luogo del punto

$$X = A + vB.$$

Il piano tangente in un punto di una generatrice generica AB è il piano dei punti A, B, $A' + vB'$ [A' e B' essendo i punti di coordinate $(0, 0, u_2', \dots, u_n')$, $(0, 0, u'_{n+1}, \dots, u'_{2n-1})$]. Ma per le (5) si ha $A' \equiv B'$, onde il piano tangente nei punti di una generica generatrice è fisso e la rigata è sviluppabile.

Si verifica immediatamente che è vero il viceversa. Basta assumere una rappresentazione parametrica di una generica rigata sviluppabile $X = A + vB$ in guisa che i punti A e B descrivano le curve intersezione della rigata cogli iperpiani $x_0 = 0$ e $x_1 = 0$ rispettivamente.

Si ha pure:

Le curve quasi-asintotiche γ_{12} di W sono tutte e sole quelle le cui tangenti giacciono su W.

Infatti se una curva γ di W è quasi-asintotica γ_{12}, ogni sua tangente ha tre punti, infinitamente vicini, appartenenti a W. Ma è evidente che ogni retta avente tre punti su W (che è intersezione di quadriche) vi appartiene. Viceversa se γ ha le sue tangenti giacenti su W, la superficie rigata sviluppabile circoscritta a γ sta su W, i suoi piani tangenti (osculatori a γ) appartengono ai relativi S_t tangenti a W e perciò γ è quasi asintotica γ_{12}.

Dai due teoremi precedenti segue il risultato noto (5):

Affinchè una rigata dello spazio ordinario o di un iperspazio sia sviluppabile (o, in particolare, sia un cono), occorre e basta che la sua imagine sulla grassmanniana delle rette sia una curva le cui tangenti giacciano su tale grassmanniana.

4. *Curve quasi-asintotiche* γ_{13} *di* W.

Le curve quasi-asintotiche γ_{13} di W sono caratterizzate dal seguente teorema:

Le curve quasi-asintotiche γ_{13}, *non* γ_{12}, *della varietà di Grassmann che rappresenta le rette di* S_n ($n \geq 3$) *sono tutte e sole le curve che sono immagini di superficie rigate sghembe immerse in spazi* S_3 *di* S_n (6).

Sia γ una curva di W di equazioni (3) e (4) e supponiamo che non sia quasi-asintotica γ_{12}.

Affinchè γ sia quasi-asintotica γ_{13} occorre e basta che siano nulli tutti i minori di ordine massimo estratti dalla matrice le cui righe sono formate colle coordinale di un punto P generico di γ, dei punti derivati primi di P su W e dei punti derivati secondo e terzo di P su γ, ma non tutti i minori d'ordine massimo estratti dalla matrice ottenuta dalla precedente sopprimendo l'ultima riga.

Da tali condizioni si trae che le $u_r(\tau)$ devono annullare tutti i minori del 2° ordine estratti dalla matrice

$$\left\| \begin{matrix} \beta_{hk} \\ \beta'_{hk} \end{matrix} \right\| \qquad (h,\ k = 2,\ 3, \ldots,\ n;\quad h < k),$$

dove $\beta_{hk} = \begin{vmatrix} u'_h, & u'_k \\ u'_{h+n-1} & u'_{k+n-1} \end{vmatrix}$ e β'_{hk} è la derivata di β_{hk} rispetto a τ, ma non devono annullare tutte le β_{hk}.

Si consideri la rigata di S_n, rappresentata da γ, $X = A + vB$, dove A e B hanno coordinate date dalle (6). Si osservi che le β_{hk} sono le coordinate grassmanniane delle rette $A'B'$ congiungenti i punti derivati primi di A e B. Le condizioni analitiche che devono essere soddisfatte perchè γ sia una γ_{13}, geometricamente, significano che la curva di W immagine delle rette $A'B'$ si riduce ad un punto. Segue che la retta $A'B'$ è fissa e i punti A', B', $A'' + vB''$ sono allineati. Lo spazio $S(2)$ osculatore in un punto generico X della rigata, individuato dai punti A, B, A', B', $A'' + vB''$, ha dimensione 3. Ma allora la superficie è immersa in un S_3 o è una

(5) Si veda: B. Segre, *Trasporti rigidi di vettori, e geometria della retta*, « Annali di Matematica », ser. IV, vol. XXVII, p. 272 (1948).

(6) Evidentemente se $n = 3$ ogni curva di W è γ_{13}.

rigata sviluppabile. Poichè è escluso che si tratti di una sviluppabile, non essendo γ una γ_{12} (n. 3), si conclude che essa è una rigata sghemba immersa in un S_3.

Viceversa la curva immagine di una rigata sghemba immersa in un S_3 appartiene alla V_4^2 di KLEIN di W che rappresenta le rette di quell' S_3. E siccome tale V_4^2 sta in un S_5, ogni sua curva è quasi-asintotica γ_{13} per essa. Il teorema è così dimostrato poichè è evidente che se una curva è quasi-asintotica di indici r, s per una varietà V_h giacente su una V_k, lo è anche per la V_k.

OSSERVAZIONE. – Dal teorema precedente scende evidentemente che: *Le curve quasi-asintotiche* γ_{13}, *non* γ_{12}, *di* W *sono tutte e sole quelle tracciate sulle* V_4^2 *di Klein di* W, *le cui tangenti non giacciono su* W.

5. *Superficie quasi-asintotiche* σ_{12} *di* W.

La varietà W possiede una infinità di superficie quasi-asintotiche σ_{12}, dipendente da funzioni arbitrarie, di tutte tre le specie.

a) Per le σ_{12}^3, quasi-asintotiche σ_{12} di 3ª specie, cioè tali che l'$S(2)$ osculatore alla superficie in un suo punto generico appartiene all'S_t tangente ivi a W, si ha:

Le superficie quasi-asintotiche σ_{12}^3 *della varietà di Grassmann rappresentativa delle rette di* S_n *sono, oltre ai piani immagini dei piani rigati di* S_n, *tutte e sole le superficie rappresentative dei coni di* S_n *proiettanti da un punto una superficie.*

Se σ è una superficie quasi-asintotica σ_{12}^3, palesemente ogni sua curva è quasi-asintotica γ_{12} per W. Consideriamo ora la ∞^2 di rette rappresentata da σ. Siccome ogni curva di σ è quasi asintotica γ_{12}, per il teorema del n. 3, tutte le superficie rigate della ∞^2 sono sviluppabili. Ma ciò, come è ben noto (7), vuol dire che la ∞^2 si compone di rette passanti per un punto o giacenti in un piano.

La proposizione inversa è immediata quando si pensi che ogni ∞^2 di rette passanti per un punto o giacenti in un piano ha per immagine su W una superficie tracciata su uno spazio lineare appartenente a W.

OSSERVAZIONE. – Scende dal teorema precedente che *le superficie quasi-asintotiche* σ_{12}^3 *di* W *sono tutte e sole le superficie tracciate sugli spazi lineari di* W.

b) Per le σ_{12}^2, quasi-asintotiche σ_{12} di 2ª specie, tali cioè che l' $S(2)$ osculatore alla superficie in un suo punto generico e l'S_t tangente ivi a W hanno uno spazio congiungente di dimensione $t+1$, si ha.

(7) Si veda: C. SEGRE, *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*, « Rend. Circolo Mat. di Palermo », vol. XXX, p. 111 (1910).

Le superficie σ_{12}^2, non σ_{12}^3, della varietà di Grassmann rappresentativa delle rette di S_n *sono tutte e sole quelle che rappresentano* V_3 *di* S_n, *luogo di ∞^2 rette non passanti per un punto, aventi l'* S_3 *tangente fisso lungo ogni retta.*

Sia σ una superficie di W e supponiamo che non sia quasi-asintotica σ_{12}^3. Essa sia rappresentata dalle (3) dove si ponga

$$u_r = u_r(\tau_1, \tau_2) \qquad (r = 2, 3, \dots, 2n-1). \tag{7}$$

Consideriamo la matrice, avente $2(n+1)$ righe, i cui elementi sono costituiti ordinatamente dalle coordinate di un punto P generico di σ, dei $2(n-1)$ punti derivati primi di P su W e dei tre punti derivati secondi di P su σ. Perchè σ sia quasi-asintotica σ_{12}^2 occorre e basta che tale matrice abbia caratteristica $2n$. Da ciò si deduce che le u_r devono annullare tutti i minori del 2° ordine estratti dalla matrice

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_{hk} \\ \beta_{hk} \\ \gamma_{hk} \end{matrix} \right\| \qquad (h, k = 2, \dots, n; \quad h < k), \tag{8}$$

ma non tutti gli elementi della medesima, dove si è posto

$$\alpha_{hk} = \begin{vmatrix} u^1{}_h & u^1{}_k \\ u^1{}_{h+n-1} & u^1{}_{k+n-1} \end{vmatrix}, \quad \beta_{hk} = \begin{vmatrix} u^1{}_h & u^1{}_k \\ u^2{}_{h+n-1} & u^2{}_{k+n-1} \end{vmatrix} +$$
$$+ \begin{vmatrix} u^2{}_h & u^2{}_k \\ u^1{}_{h+n-1} & u^1{}_{k+n-1} \end{vmatrix}, \quad \gamma_{hk} = \begin{vmatrix} u^2{}_h & u^2{}_k \\ u^2{}_{h+n-1} & u^2{}_{k+n-1} \end{vmatrix}$$

e gli indici 1, 2 in alto indicano derivazione parziale delle u_r rispetto a τ_1, τ_2. Si consideri la V_3 di S_n rappreventata su W da σ. Questa è il luogo del punto $X = A + vB$, dove A, B sono i punti aventi per coordinate le (6), essendo le u_r date dalle (7). Si osservi che le α_{hk} sono le coordinate grassmanniane della retta A^1B^1, le γ_{hk} quelle della retta A^2B^2 [8]. L'essere nulli tutti i minori del 2° ordine della (8) significa intanto che le due rette A^1B^1, A^2B^2 coincidono o sono entrambe indeterminate, o una sola è indeterminata. Nel I e II caso è manifesto che l'S_3 tangente in un punto generico X di una generatrice, individuato dai punti A, B, $A^1 + vB^1$, $A^2 + vB^2$, è fisso al variare del punto sulla generatrice. Nel III caso, se ad es. è indeterminata la retta A^1B^1 poichè coincidono i punti A^1 e B^1, si osservi che le β_{hk} rappresentano le coordinate

[8] A^1, B^1, A^2, B^2 rappresentano i punti derivati di A e B rispetto a τ_1, τ_2; ad es. A^1 è il punto di coordinate $(0, 0, u_2{}^1, \dots u_n{}^1)$.

grassmanniane della retta $A^1B^2 + \lambda A^2A^1$ (9). Per le condizioni poste tale retta deve coincidere colla A^2B^1 dal che segue la conclusione stessa (10).

Invertendo il ragionamento precedente e assumendo una rappresentazione parametrica di una V_3, $X = A + vB$, in modo che i punti A e B descrivano due superficie degli iperpiani $x_0 = 0$ e $x_1 = 0$ rispettivamente, si dimostra la proposizione inversa.

c) Infine per le σ^1_{12} di 1ª specie, tali cioè che l'$S(2)$ osculatore alla superficie in un suo punto generico a l'S_t tangente ivi a W hanno uno spazio congiungente di dimensione $t+2$, si ha :

Le superficie quasi-asintotiche $\sigma_{12}{}^1$, *non* $\sigma_{12}{}^2$ *nè* $\sigma_{12}{}^3$, *della varietà di Grassmann rappresentativa delle rette di* S_n $(n > 3)$ *sono tutte e sole quelle che rappresentano* V_3, *luogo di* ∞^2 *rette, aventi un piano tangente fisso lungo ogni retta e l'*S_3 *tangente variabile.*

Affinchè una superficie σ di W, di equazioni (3) e (7), sia quasi-asintotica $\sigma_{12}{}^1$, ma non $\sigma_{12}{}^2$ nè $\sigma_{12}{}^3$, occorre e basta che le u_r annullino tutti i minori del 3° ordine estratti della matrice (8), ma non tutti quelli del 2°. Se sono nulli tutti i minori del 3° ordine estratti dalla matrice (8) sono nulli anche quelli del 3° ordine estratti dalla

$$\left\|\begin{matrix} \alpha_{hk} \\ \alpha_{hk} + v\beta_{hk} + v^2\gamma_{hk} \\ \gamma_{hk} \end{matrix}\right\| . \tag{9}$$

Siccome le $\alpha_{hk} + v\beta_{hk} + v^2\gamma_{hk}$ sono le coordinate grassmanniane della retta congiungente i punti $A^1 + vA^2$, $B^1 + vB^2$, le precedenti condizioni assicurano che le rette A^1B^1, A^2B^2, $A^1 + vA^2B^1 + vB^2$ stanno in un fascio o una di esse è indeterminata. In ogni caso ne deriva che stanno pure in un fascio le rette congiungenti i punti $A^1 + vB^1$, $A^2 + vB^2$ e che perciò lungo ogni generatrice vi è un piano tangente fisso, che è quello che la congiunge col centro di detto fascio.

Assumendo la rappresentazione parametrica di una V_3 come è stato indicato in *b*), si prova l'inverso.

(9) Con $A^1B^2 + \lambda A^2A^1$ denotiamo la retta avente per coordinate grassmanniane la corrispondente combinazione lineare delle coordinate delle rette A^1B^2, A^2A^1.

(10) Se poi A^1 è indeterminato le β_{hk} sono le coordinate della A^2B^1 e se ne trae subito la stessa conclusione.