Bollettino Unione Matematica Italiana

Renato Nardini

Sulle vibrazioni quasi-armoniche di un sistema dissipativo con elasticità periodica

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.4, p. 370–373.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_4_370_0>

Sulle vibrazioni quasi-armoniche di un sistema dissipativo con elasticità periodica.

Nota di Renato Nardini (a Ferrara).

Sunto. - *Si approssima per eccesso il limite superiore dell'ultima zona di instabilità nelle vibrazioni quasi-armoniche di un sistema dissipativo con elasticità periodica.*

1. - In un recente lavoro (¹) ho studiato il moto di un sistema dissipativo a un sol grado di libertà soggetto a forze elastiche variabili periodicamente col tempo; l'equazione del moto nell'intorno della configurazione di equilibrio $y = 0$ è

$$y'' + 2cy' + \omega^2(t)y = 0 \tag{1}$$

dove c è una costante > 0 ed $\omega(t)$ è una funzione periodica di periodo T, che si è supposta inoltre > 0, limitata e continua con derivata prima continua. Ho dimostrato, fra l'altro, che, affinchè ogni integrale di (1) e la sua derivata prima tendano a zero per $t \to +\infty$ (²), è sufficiente che, detti, nell'ordine, $M_1, M_2, \ldots M_k$ i massimi relativi ed $m_1, m_2, \ldots m_k$ i minimi relativi di $\omega(t)$ nell'intervallo $t_0 \frown t_0 + T$ (supposti in numero finito), detto m il minimo di $\omega(t)$ e supposto $c < m$, sia (³)

$$T > \frac{1}{2c} \log \frac{M_1^2 - c^2}{m_1^2 - c^2} \frac{M_2^2 - c^2}{m_2^2 - c^2} \cdots \frac{M_k^2 - c^2}{m_k^2 - c^2}. \tag{2}$$

(¹) *Sulla stabilità delle vibrazioni quasi-armoniche di un sistema dissipativo,* « Rend. dell'Acc. Naz. dei Lincei. », vol. VI (1949 .

(²) Tale risultato assicura che la configurazione $y = 0$ è di equilibrio stabile.

(³) Con ciò si approssima per eccesso il limite superiore dell'ultima zona di instabilità

Nel presente lavoro si estende la formula (2) anche al caso in cui sia $c \geq m$, mantenendo le altre ipotesi [4].

2. A tale scopo scomponiamo c in due addendi $c = p + \sigma$ con $0 < \sigma \leq c$, $0 \leq p < c$. Poniamo quindi nella (1)

$$y = e^{-\sigma t} z \tag{3}$$

ottenendo l'equazione

$$z'' + 2pz' + [\omega^2(t) - 2c\sigma + \sigma^2]z = 0 .$$

Sfruttando l'arbitrarietà di σ si può porre

$$\omega^2(t) - 2c\sigma + \sigma^2 = \alpha^2(t) \qquad \text{con } \alpha^2(t) > 0 ;$$

basta infatti che sia $\sigma^2 - 2c\sigma + m^2 > 0$; ora, se $c < m$, ciò si verifica per $\sigma = c$ [5]; per $c \geq m$ basterà suppore

$$\sigma < c - \sqrt{c^2 - m^2} .$$

Si ha allora l'equazione

$$z'' + 2pz' + \alpha^2(t)z = 0 . \tag{4}$$

Detto $z(t)$ un integrale qualunque di essa si consideri la funzione

$$\Lambda^2(t) = \alpha^2(t)z^2(t) + z'^2(t)$$

che è sempre > 0, qualora si escluda la soluzione $z \equiv 0$. Tenendo conto della (4) si ottiene

$$\frac{d\Lambda^2}{dt} = 2\alpha\alpha' z^2 + 2z'(\alpha^2 z + z'') = 2\alpha\alpha' z^2 - 4pz'^2$$

e quindi

$$\frac{\frac{d\Lambda^2}{dt}}{\Lambda^2} = \frac{2\frac{\alpha'}{\alpha}\alpha^2 z^2 + \frac{\alpha'}{\alpha}z'^2 - \frac{\alpha'}{\alpha}z'^2}{\alpha^2 z^2 + z'^2} - 4p\frac{z'^2}{\alpha^2 z^2 + z'^2}$$

$$= \frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\alpha'}{\alpha}\frac{\alpha^2 z^2 - z'^2}{\alpha^2 z^2 + z'^2} - 4p\frac{z'^2}{\alpha^2 z^2 + z'^2}$$

$$\leq \frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{|\alpha'|}{\alpha} .$$

Detto t_0 il valore iniziale del tempo, integrando fra t_0 e t, si

[4] Ricordiamo che, detto M il massimo di $\omega(t)$, se $c \geq M$, si ha stabilità per ogni valore di T, come è stato dimostrato da R. EINAUDI nella nota *Sulle vibrazioni quasi-armoniche di un sistema dissipativo*. « Atti del l'Ist. Veneto ». Tomo XCV, Parte II (1936).

[5] Per $\sigma = c$ (e quindi per $p = 0$) si ricade nel caso trattato al n. 3 del lavoro citato.

ottiene

$$\log \frac{\Lambda^2(t)}{\Lambda^2(t_0)} \leq \log \frac{\alpha(t)}{\alpha(t_0)} + \int_{t_0}^{t} \frac{|\alpha'|}{\alpha} dt \tag{5}$$

L'ultimo integrale vale

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\omega |\omega'|}{\omega^2 - 2c\sigma + \sigma^2} dt$$

e, dividendo l'intervallo di integrazione con i punti estremanti di $\omega(t)$, come si è fatto nel lavoro citato nel caso $\sigma = c$, si ricava che se è

$$t_0 + (n-1)T < t \leq t_0 + nT \qquad (n = 1, 2, ...)$$

tale integrale è minore o uguale a

$$n \log \frac{M_1^2 - 2c\sigma + \sigma^2}{m_1^2 - 2c\sigma + \sigma^2} \frac{M_2^2 - 2c\sigma + \sigma^2}{m_2^2 - 2c\sigma + \sigma^2} \cdots \frac{M_k^2 - 2c\sigma + \sigma^2}{m_k^2 - 2c\sigma + \sigma^2}.$$

Da (5) si ha allora, chiamando con λ il prodotto sotto logaritmo

$$\Lambda^2(t) \leq \Lambda^2(t_0) \frac{\alpha(t)}{\alpha(t_0)} e^{n \log \lambda}.$$

Ora per la (3) si ha

$$\Lambda^2(t) = [(\omega^2 - 2c\sigma + \sigma^2)y^2 + (\sigma y + y')^2] e^{2\sigma t}$$

e perciò

$$(\omega^2 - 2c\sigma + \sigma^2)y^2 + (\sigma y + y')^2 \leq \Lambda^2(t_0) \frac{\alpha(t)}{\alpha(t_0)} e^{n \log \lambda - 2\sigma(n-1)T}.$$

Tale espressione è limitata se è

$$n \log \lambda - 2\sigma n T \leq 0$$

ovvero

$$2\sigma T \geq \log \lambda$$

anzi tende a zero per $t \to +\infty$ se vale il segno $>$, cioè ogni y e la sua derivata prima tendono a zero per $t \to +\infty$, e quindi si ha stabilità, se è

$$T > \frac{1}{2\sigma} \log \frac{M_1^2 - 2c\sigma + \sigma^2}{m_1^2 - 2c\sigma + \sigma^2} \frac{M_2^2 - 2c\sigma + \sigma^2}{m_2^2 - 2c\sigma + \sigma^2} \cdots \frac{M_k^2 - 2c\sigma + \sigma^2}{m_k^2 - 2c\sigma + \sigma^2} \tag{6}$$

dove σ va scelto, fra 0 e $c - \sqrt{c^2 - m^2}$, in modo che il secondo membro di (6) sia minimo. Più precisamente se poniamo

$$f(\sigma) = \frac{1}{2\sigma} \sum_{i=1}^{k} \log \frac{M_i^2 - 2c\sigma + \sigma^2}{m_i^2 - 2c\sigma + \sigma^2}$$

si ha

$$f'(\sigma) = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{k}\log\frac{M_i^2 - 2c\sigma + \sigma^2}{m_i^2 - 2c\sigma + \sigma^2} + \frac{1}{2\sigma}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{2\sigma - 2c}{M_i^2 - 2c\sigma + \sigma^2} - \frac{2\sigma - 2c}{m_i^2 - 2c\sigma + \sigma^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sigma}\left[-\frac{1}{2\sigma}\sum_{i=1}^{k}\log\frac{M_i^2 - 2c\sigma + \sigma^2}{m_i^2 - 2c\sigma + \sigma^2} + (c-\sigma)\sum_{i=1}^{k}\frac{M_i^2 - m_i^2}{(M_i^2 - 2c\sigma + \sigma^2)(m_i^2 - 2c\sigma + \sigma^2)}\right];$$

ora tale derivata per $\sigma \to 0$ tende a $-\infty$, mentre per $\sigma \to c - \sqrt{c^2 - m^2}$ tende a $+\infty$ (annullandosi quel denominatore in cui $m_i = m$). Esisterà allora per la $f(\sigma)$ nell'intervallo $0 - c - \sqrt{c^2 - m^2}$ un punto di minimo che indicheremo con $\bar{\sigma}$ tale che

$$\frac{1}{2\bar{\sigma}}\sum_{i=1}^{k}\log\frac{M_i^2 - 2c\bar{\sigma} + \bar{\sigma}^2}{m_i^2 - 2c\bar{\sigma} + \bar{\sigma}^2} = (c - \bar{\sigma})\sum_{i=1}^{k}\frac{M_i^2 - m_i^2}{(M_i^2 - 2c\bar{\sigma} + \bar{\sigma}^2)(m_i^2 - 2c\bar{\sigma} + \bar{\sigma}^2)}$$

e si avrà la massima approssimazione, per eccesso, verso il limite superiore dell'ultima zona di instabilità dalla formula

$$T > (c - \bar{\sigma})\sum_{i=1}^{k}\frac{M_i^2 - m_i^2}{(M_i^2 - 2c\bar{\sigma} + \bar{\sigma}^2)(m_i^2 - 2c\bar{\sigma} + \bar{\sigma}^2)}.$$

Il valore $\bar{\sigma}$ si potrà calcolare nei casi numerici. Nel caso generale, per avere una formula più concreta, si può maggiorare la $f(\sigma)$ in questo modo:

$$f(\sigma) \leq \frac{k}{2\sigma}\log\frac{M^2 - 2c\sigma + \sigma^2}{m^2 - 2c\sigma + \sigma^2}$$

e quindi, essendo (6),

$$\log\frac{M^2 - 2c\sigma + \sigma^2}{m^2 - 2c\sigma + \sigma^2} = \log\left(1 + \frac{M^2 - m^2}{m^2 - 2c\sigma + \sigma^2}\right) < \frac{M^2 - m^2}{m^2 - 2c\sigma + \sigma^2},$$

si ha certamente stabilità per

$$T \geq \frac{k}{2\sigma}\,\frac{M^2 - m^2}{m^2 - 2c\sigma + \sigma^2}.$$

È immediato ricavare che il minimo del secondo membro nell'intervallo $(0 - c - \sqrt{c^2 - m^2})$ si ha per

$$\sigma = \frac{1}{3}\left(2c - \sqrt{4c^2 - 3m^2}\right)$$

cioè si ha stabilità per

$$T \geq \frac{27}{4}\,\frac{k(M^2 - m^2)}{c(9m^2 - 8c^2) + (\sqrt{4c^2 - 3m^2})^3}.$$

(6) Siccome è $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$, è $x > \log(1 + x)$ per $x > 0$.