# Bollettino Unione Matematica Italiana



Massimo Mineo


## Sviluppo rigoroso in serie del potenziale newtoniano terrestre


*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **4** (1949), n.4, p. 391–394.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_4_391_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1949.

# Sviluppo rigoroso in serie del potenziale newtoniano terrestre.

Nota di MASSIMO MINEO (a Palermo).

**Sunto.** - *Il Pizzetti ha dato l'espressione del potenziale newtoniano terrestre nell'ipotesi che una superficie esteriore d'equilibrio della Terra sia un ellissoide rotondo. In questa Nota se ne dà lo sviluppo rigoroso in una serie multipla, della quale si assegna un intervallo di convergenza.*

Sia

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

l'equazione dell'ellissoide, che si suppone superficie esteriore d'equilibrio terrestre. Sia

$$\varepsilon^2=\frac{a^2-b^2}{b^2} \tag{2}$$

il quadrato dell'*eccentricità aggiunta*. Il potenziale newtoniano $V$, nei punti esterni a (1), è, in questa ipotesi:

$$\begin{aligned} V=\left(M+\frac{2}{3}Q\right)\frac{\operatorname{arc\,tang} E}{b\varepsilon}-\frac{Q}{b^3\varepsilon^3}\left(\operatorname{arc\,tang} E-\frac{E}{1+E^2}\right)(x^2+y^2)-\\ -\frac{2Q}{b^3\varepsilon^3}(E-\operatorname{arc\,tang} E)z^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Nella (3), $M$ rappresenta la massa totale terrestre. $Q$ ha l'espressione seguente:

$$Q=\frac{a^2b\omega^2\varepsilon^3}{2f[(3+\varepsilon^2)\operatorname{arc\,tang}\varepsilon-3\varepsilon]}, \tag{4}$$

essendo $\omega$ la velocità angolare (costante) della rotazione terrestre ed $f$ la costante dell'attrazione universale. Chiamando $\lambda$ la maggiore radice dell'equazione

$$\frac{x^2+y^2}{a^2+\lambda}+\frac{z^2}{b^2+\lambda}=1, \tag{5}$$

la quantità $E$ è data dalla relazione

$$E=\frac{b\varepsilon}{\sqrt{b^2+\lambda}}\ \text{[1]}. \tag{6}$$

[1] Cfr. PIZZETTI, *Princìpi della teoria meccanica della figura dei pianeti*, Pisa, Spoerri, 1913, p. 52 (con scambio di $i$ in $\varepsilon$).

Se indichiamo con $\rho$ il raggio vettore d' un punto esterno alla (1), quindi $\rho > b$, e con $\theta$ la sua colatitudine, abbiamo:

$$\lambda = \frac{\rho^2}{2}\left[1 - \frac{b^2}{\rho^2}(2 + \varepsilon^2) + \sqrt{1+u}\right], \tag{7}$$

essendo

$$u = \frac{2b^3\varepsilon^2}{\rho^2}(2\cos^2\theta - 1) + \frac{b^4\varepsilon^4}{\rho^4}. \tag{8}$$

Ne segue

$$\frac{b^2\varepsilon^2}{\rho^2}(\varepsilon^2 - 2) \leqq u \leqq \frac{b^2\varepsilon^2}{\rho^2}(\varepsilon^2 + 2). \tag{9}$$

Ponendo

$$U = \frac{b^2\varepsilon^2}{2\rho^2} - \frac{\sqrt{1+u} - 1}{2}, \tag{10}$$

si deduce:

$$0 \leqq U \leqq \frac{b^2\varepsilon^2}{\rho^2}. \tag{11}$$

Sviluppando $U$ in serie, si trova:

$$U = \frac{b^2\varepsilon^2}{\rho^2} - \frac{1}{4}u + \frac{1}{2^3.2!}u^2 + \dots + (-1)^n \frac{1.3.5 \dots 2n-3}{2^{n+1}n!}u^n + \dots. \tag{12}$$

E in conseguenza si ha per $E$ lo sviluppo:

$$E = \frac{b\varepsilon}{\rho}\left[1 + \frac{1}{2}U + \frac{1.3}{2^2.2!}U^2 + \dots + \frac{1.3.5 \dots 2n-1}{2^n n!}U^n + \dots\right], \tag{13}$$

avendosi

$$\frac{b\varepsilon}{\rho} < E < \frac{b\varepsilon}{\rho}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b^2\varepsilon^2}{\rho^2}}}. \tag{14}$$

D' altra parte si ha

$$\text{arc tang}\, E = E - \frac{E^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{E^{2n+1}}{2n+1} + \dots. \tag{15}$$

Cominciamo ora a vedere se si possa sostituire la serie (12) nella serie (13) e in quale intervallo converga la serie di serie in $u$.

Le due serie

$$E^* = \frac{b\varepsilon}{\rho}(1 + U^* + U^{*2} + \dots + U^{*n} + \dots) = \frac{b\varepsilon}{\rho}\frac{1}{1 - U^*}, \tag{16}$$

$$U^* = \frac{1}{4}(1 + u + u^2 + \dots + u^n + \dots) = \frac{1}{4}\frac{1}{1-u}, \tag{17}$$

sono manifestamente due funzioni maggioranti per (12) e (13); e il quadro a doppia entrata a coefficienti positivi

$$\begin{array}{l} \frac{b\varepsilon}{\rho} + \frac{b\varepsilon}{\rho}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^r} + \dots\right) \\ \quad + \frac{b\varepsilon}{\rho}\left(\frac{1}{4}u + \binom{2}{1}\frac{1}{4^2}u + \dots + \binom{r}{1}\frac{1}{4^r}u + \dots\right) \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \quad + \frac{b\varepsilon}{\rho}\left(\frac{1}{4}u^n + \binom{2+n-1}{n}\frac{1}{4^2}u^n + \dots + \binom{r+n-1}{n}\frac{1}{4_r}u^n + \dots\right) \end{array}$$

costituisce un quadro *assolutamente convergente*, in un intervallo per $u$ facilmente determinabile. Infatti, sommando gli elementi della colonna di posto $r+1$, si ha

$$\frac{b\varepsilon}{\rho}\frac{1}{4^r}\frac{1}{(1-u)^r}.$$

Occorre dunque e basta che converga la serie

$$\frac{b\varepsilon}{\rho}\left[1 + \frac{1}{4}\frac{1}{1-u} + \left(\frac{1}{4}\frac{1}{1-u}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{4}\frac{1}{1-u}\right)^r + \dots\right]$$

e che quindi si abbia

$$|1-u| > \frac{1}{4},$$

per la qual cosa è sufficiente sia $|u| < \frac{3}{4}$.

Ne segue, per noti teoremi [2], che è lecito sostituire la (12) nella (13), e che la serie in $u$, che si deduce, converge certamente per $|u| < \frac{3}{4}$, senza escludere che possa convergere in un intervallo più ampio.

Vediamo che cosa accade se questa serie di serie in $u$, che rappresenta $E$, si sostituisce a sua volta in (15). Una serie maggiorante di (15) è

(18) $$E + E^3 + \dots + E^{2n+1} + \dots.$$

Basterà allora esaminare la serie che si ottiene dalla (18), quando in essa si sostituisce la serie di serie in $u$, già ottenuta dalla sostituzione di (17) in (16). Si trova facilmente, con lo stesso metodo di prima, essere sufficiente che converga la serie geometrica

$$\frac{b\varepsilon}{\rho}\frac{4(1-u)}{3-4u} + \frac{b^3\varepsilon^3}{\rho^3}\left(\frac{4(1-u)}{3-4u}\right)^3 + \dots.$$

E per questo basta che sia $|u| \leqq \frac{1}{2}$ [3].

[2] Vedi GOURSAT, *Cours d'Analyse Mathématique*, Paris, 1927, Tome I, 440.

La sviluppabilità di $V$ in una serie di potenze di $u$, nell'intervallo predetto, resta quindi dimostrata quanto al termine dipendente dall'arco tangente di $E$; ma resta dimostrata senz'altro anche per i rimanenti termini perchè le serie

$$\text{arc tang}\, E - \frac{E}{1+E^2} = \frac{2}{3}E^3 - \frac{4}{5}E^5 + \dots + (-1)^{n+1}\frac{2n}{2n+1}E^{2n+1} + \dots,$$

$$E - \text{arc tang}\, E = \frac{E^3}{3} - \frac{E^5}{5} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{E^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

hanno la stessa funzione maggiorante (18).

Volendo lo sviluppo di $V$ in una serie di potenze di $\varepsilon^2$, non resta che da sviluppare in serie la quantità $Q$, data da (4), Si ha:

$$Q\varepsilon^2 = \frac{15b^3\omega^2(1+\varepsilon^2)}{8f}(1 + H + H^2 + \dots), \tag{19}$$

essendo

$$H = \frac{15}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{3}{2n+5} - \frac{1}{2n+3}\right)\varepsilon^{2n}, \tag{20}$$

con

$$\frac{\varepsilon^2}{7}(6 - 5\varepsilon^2) < H < \frac{6}{7}\varepsilon^2.$$

La funzione $Q$ ha un polo per $\varepsilon^2 = 0$, ma questo polo si elimina, come è facile vedere, nel 2° membro di (3), sicchè $V$ è una serie intera in $\varepsilon^2$.

La funzione arc tang $E$ è armonica fuori di (1) quindi esprimibile per mezzo dei polinomi di LEGENDRE $P_2, P_4, P_6, \dots$ (dove si ponga $x = \cos\theta$). Si trova:

$$\frac{\text{arc tang}\, E}{b\varepsilon} = \frac{1}{\rho} - \frac{b^2\varepsilon^2}{3}\frac{P_2}{\rho^3} + \frac{b^4\varepsilon^4}{5}\frac{P_4}{\rho^5} - \frac{b^6\varepsilon^6}{7}\frac{P_6}{\rho^7} + \dots. \tag{21}$$

E quindi è anche una funzione armonica il coefficiente di $Q$ nel 2° membro della (3) e si ha:

$$\begin{aligned}\frac{\rho^2}{b^3\varepsilon^3}\left[\left(\text{arc tang}\, E - \frac{E}{1+E^2}\right)\text{sen}^2\theta + 2(E - \text{arc tang}\, E)\cos^2\theta\right] = \\ = \frac{2}{3}\frac{1}{\rho} - \frac{2}{5}b^2\varepsilon^2\frac{P_2}{\rho^3} + \frac{2}{7}b^4\varepsilon^4\frac{P_4}{\rho^5} - \frac{2}{9}b^6\varepsilon^6\frac{P_6}{\rho^7} + \dots.\end{aligned} \tag{22}$$

E per mezzo di (19), (21) e (22), si può scrivere facilmente lo sviluppo dl $V$ ordinato secondo le potenze di $\varepsilon^2$.

(3) Per le applicazioni, $\varepsilon^2$, nel caso della Terra, è circa 0 0067, e quindi $u$ è compreso tra $-0{\cdot}0134$ e $+ 0\,0134$.