Bollettino
Unione Matematica Italiana

Ubaldo Richard

Osservazioni sulla bisezione delle funzioni ellittiche di Weierstrass

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.4, p. 395–397.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_4_395_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1949.

Osservazioni sulla bisezione delle funzioni ellittiche di Weierstrass.

Nota di UBALDO RICHARD (a Torino).

Sunto. - *Si dimostra come le note formule di bisezione delle funzioni ellittiche di* WEIERSTRASS *si possano ricavare, direttamente e con mezzi del tutto elementari, dall' equazione di bisezione.*

La formula di bisezione

$$\wp\left(\frac{u}{2}\right) = \wp u + \sqrt{\wp u - e_1}\sqrt{\wp u - e_2} + \sqrt{\wp u - e_2}\sqrt{\wp u - e_3} + \sqrt{\wp u - e_3}\sqrt{\wp u - e_1} \tag{1}$$

è stata scritta esplicitamente da G. SANSONE [1] utilizzando i noti legami tra funzioni di WEIERSTRASS e funzioni di JACOBI; anche nel più recente testo dello stesso Autore [2] si trova solo una verifica diretta « a posteriori ».

Ritenendo che una soluzione diretta dell' equazione di bisezione, che non faccia ricorso nè alle funzioni di JACOBI nè (almeno esplicitamente) alla teoria di GALOIS, abbia qualche interesse didattico, mi sono riproposto il problema.

Bisezione della $\wp u$. Eliminando le derivate dalla formula di duplicazione si ricava subito l'equazione di bisezione

$$x^4 - 4\wp u \cdot x^3 + \frac{1}{2} g_2 x^2 + (2g_3 + g_2 \wp u)\, x + \frac{1}{16} g_2^2 + g_3 \wp u = 0 \tag{2}$$

(1) G. SANSONE: *La formula di bisezione della* $\wp$u *di* WEIERSTRASS, *e un teorema sui punti razionali delle cubiche ellittiche a coefficienti razionali.* « Rend. Acc. d'Italia », (7), 2 (1941), pp. 124-128. La formula (1) si trova, proposta come esercizio al lettore, in E. T. WHITTAKER: *A Course of Modern Analysis,* Cambridge, 1902, n. 183, pag. 334, con un errore di stampa. Nelle successive edizioni, che portano anche il nome di G. N. WATSON, ricompare corretta col num. 20.33.

(2) G. SANSONE: *Lezioni sulla teoria delle funzioni di una variabile complessa.* Padova, 1947, vol. II, cap. XI, n. 15.

con le quattro radici

$$x_0 = \wp\left(\frac{u}{2}\right), \quad x_i = \wp\left(\frac{u}{2} + \omega_i\right); \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{3}$$

Trattando la (2) con una delle classiche risolventi cubiche si trova che le radici della risolvente si esprimono razionalmente nel corpo K generato da $\wp u$ e dalle radici e_1, e_2, e_3 dell'equazione $4t^3 - g_2 t - g_3 = 0$.

In realtà il problema è ancora più elementare, in quanto la (2) si trasforma facilmente in una reciproca generale ([3]).

Il teorema di addizione permette infatti di scrivere formule come

$$\begin{cases} x_1 = e_1 + \dfrac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{x_0 - e_1} \\[2ex] x_2 = e_1 + \dfrac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{x_3 - e_1} \end{cases}$$

Sicchè, ponendo $x = \xi + e_1$, si trova la reciproca

$$\xi^4 - 2a\xi^3 + b\xi^2 - 2am\xi + m^2 = 0 \tag{4}$$

dove

$$\begin{cases} a = 2(\wp u - e_1) \\ b = 6e_1^2 - 12e_1 \wp u + \dfrac{1}{2} g_2 \\ m = 3e_1^2 - \dfrac{g_2}{4} = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3). \end{cases}$$

Si ha poi

$$\xi + \frac{m}{\xi} = 2\left\{ \wp u - e_1 \pm \sqrt{\wp^2 u + e_1 \wp u + e_1^2 - \frac{g_2}{4}} \right\} =$$

$$= 2\left\{ \wp u - e_1 \pm \sqrt{(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)} \right\}$$

e ne discende subito la (1), dove occorre osservare che le otto combinazioni dei segni dei tre radicali dànno al secondo membro della (1) soltanto i quattro valori desiderati.

([3]) L'equazione è senz'altro reciproca se $g_3 = 0$. Del resto, la trasformazione riesce perchè l'equazione è normale in K e il suo gruppo di Galois è il gruppo quadrinvolutorio.

Per avere $x_0 = \wp\left(\frac{u}{2}\right)$ occorre identificare $\sqrt{\wp u - e_i}$ con la funzione uniforme $\frac{\sigma_i u}{\sigma u}$; si ha così una formula ovunque valida [4].

Bisezione della $\wp' u$. Per completare la teoria della bisezione nell'ambito delle funzioni di WEIERSTRASS scriviamo ancora la formula relativa alla $\wp' u$. Derivando la (1) si ottiene subito:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\wp'\left(\frac{u}{2}\right) &= \wp' u - (2\wp u + e_1)\sqrt{\wp u - e_1} - (2\wp u + e_2)\sqrt{\wp u - e_2} - \\ &\quad - (2\wp u + e_3)\sqrt{\wp u - e_3} = \\ &= \wp' u - (\wp u - e_1)[\sqrt{\wp u - e_2} + \sqrt{\wp u - e_3}] - \\ &\quad - (\wp u - e_2)[\sqrt{\wp u - e_3} + \sqrt{\wp u - e_1}] - \\ &\quad - (\wp u - e_3)[\sqrt{\wp u - e_1} + \sqrt{\wp u - e_2}].\end{aligned} \tag{5}$$

I segni dei tre radicali devono qui scegliersi in modo che sia [5]

$$\sqrt{\wp u - e_1}\,\sqrt{\wp u - e_2}\,\sqrt{\wp u - e_3} = -\frac{1}{2}\wp' u$$

e il secondo membro della (5) assume allora i quattro valori

$$x_0 = \wp'\left(\frac{u}{2}\right), \qquad x_i = \wp'\left(\frac{u}{2} + \omega_i\right); \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{6}$$

che soddisfano all'equazione di bisezione

$$x^4 - 8\wp' u \cdot x^3 - (12 g_2 \wp u + 18 g_3) x^2 + g_2^3 - 27 g_3^2 = 0. \tag{7}$$

Non è però semplice dedurre la (7) dalle formule di duplicazione, e, non volendo usare le (5), è preferibile determinare le funzioni simmetriche delle (6) mediante lo studio delle caratteristiche dei poli.

[4] Soltanto così si ottiene per $u \to 0$ la caratteristica prescritta. Cfr. G. SANSONE: lezioni citate.

[5] La convenzione si accorda con la scelta $\sqrt{\wp u - e_i} = \frac{\sigma_i u}{\sigma u}$.