Bollettino Unione Matematica Italiana

Letterio Toscano

I polinomi ipergeometrici nel calcolo delle differenze finite

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.4, p. 398–409.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_4_398_0>

I polinomi ipergeometrici nel calcolo delle differenze finite.

Nota di LETTERIO TOSCANO (a Messina).

Sunto - *L'autore presenta un saggio di una nuova trattazione dei polinomi ipergeometrici, in particolare di quelli di* LAGUERRE.

1. I polinomi di LAGUERRE generalizzati

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{0}^{n}{}_i (-1)^i \binom{n+\alpha}{n-i} \frac{x^i}{i!} \tag{1}$$

vengono abitualmente definiti con la relazione

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} x^{n+\alpha} e^{-x}. \tag{2}$$

In essi oltre la variabile x compare la quantità α, e quali funzioni di quest' ultima sono stati introdotti nel calcolo delle differenze finite con le altre relazioni [1]

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha+n+1)}{n!\, x^\alpha} \Delta_\alpha^n \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \tag{3}$$

$$L_n^{(\alpha-n)}(x) = e^{-x\Delta_\alpha} \binom{\alpha}{n}. \tag{4}$$

In questa nota estendo sopratutto la [3] ai polinomi ipergeometrici

$$F(-n, \gamma+\delta; \gamma; x), \tag{5}$$

quali funzioni di γ; e inoltre, poichè non mi risulta che le [3] e [4] — poco note — siano state prese in considerazione per pro-

[1] V. G. CASTELNOVO, l. c.

[2] Tra i lavori recenti cfr. J. GERONIMUS, *On a class of Appell polynomials*, « Communications de la Société Mathématique de Kharkoff », serie 4, t. VIII, 1934. Nel confronto si badi però alle notazioni diverse.

Nell'opera di Ch. JORDAN, *Calculus of Finite Differences*, Budapest 1939 (p. 478, § 148, *Gr. polynomials*), si studiano dei polinomi che si possono pure facilmente ricondurre a quelli di LAGUERRE con la relazione $L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^n}{n!} G_n(\alpha + n)$, e l'A. li definisce come nella nostra [3].

Cfr. pure G. SZEGÖ, *Orthogonal polynomials*, « American Mathematical Society », New Jork, 1939.

varne la loro capacità e utilità nello studio dei polinomi di LAGUERRE, mi propongo di sottoporle a tale prova, particolarmente la [3], insieme alla relazione più generale per i polinomi [5].

Si tratta di dare un saggio di una nuova trattazione dei polinomi ipergeometrici, in particolare di quelli di LAGUERRE. E ricavo due nuove formule di moltiplicazione, dandone nello stesso tempo una rappresentazione integrale. Calcolo le trasformate di LAPLACE delle funzioni

$$x^{\beta+\gamma}{}_2F_2(-n,\ \gamma+\alpha\,;\ \gamma,\ \gamma+\beta+1\,;\ x)$$

$$x^{\gamma}{}_1F_2(-n\,;\ \gamma+1,\ \gamma+\beta+1\,;\ x).$$

Passo poi a stabilire alcuni sviluppi in serie di polinomi ipergeometrici o di LAGUERRE, ed estendo il noto sviluppo

$$-C-\log x=\sum_{1}^{\infty}{}_i\,\frac{L_i(x)}{i}.$$

Stabilisco per la funzione di BESSEL $J_\alpha(x)$ la relazione

$$u^{-\frac{\alpha}{2}}x^{-\frac{\alpha}{2}}J_\alpha(2\sqrt{ux})=e^{-u\Theta_\alpha}\frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

con

$$\Theta_\alpha=1+\Delta_\alpha,$$

ovvero

$$e^u u^{-\frac{\alpha}{2}}x^{\frac{\alpha}{2}}J_\alpha(2\sqrt{ux})=e^{-u\Delta_\alpha}\frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},$$

e da questa ultima ritrovo dapprima e subito il noto sviluppo

$$e^u(ux)^{-\frac{\alpha}{2}}J_\alpha(2\sqrt{ux})=\sum_{0}^{\infty}{}_i\,\frac{u^i}{\Gamma(\alpha+i+1)}L_i^{(\alpha)}(x),$$

e poi deduco l'altro

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\,u^\alpha}\sum_{0}^{\infty}{}_i\,[(-1)^iL_i^{(n-i)}(u)]\left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{i-\alpha}{2}}J_{\alpha+i}(2\sqrt{ux}),$$

che per $u=n$ è stato trovato da TRICOMI.

Infine pervengo allo sviluppo in serie

$$e^u\frac{x^{\frac{\lambda-\alpha}{2}}}{u^{\frac{\lambda+\alpha}{2}}}J_{\alpha+\lambda}(2\sqrt{ux})=\sum_{0}^{\infty}{}_i\,\frac{(-1)^i\,i\,!}{\Gamma(\alpha+i+1)}L_i^{(\lambda-i)}(u)L_i^{(\alpha)}(x).$$

Alcuni dei precedenti risultati si potrebbero specializzare per polinomi di HERMITE. E più in generale estendere ai polinomi ipergeometrici di GAUSS — ove non è stato fatto — e a quelli di tipo ${}_rF_s$, seguendo sempre il procedimento di questa nota.

2. L' estensione della [3] si ottiene subito senza artifici. Si ha

$$F(-n,\ \gamma+\delta\,;\ \gamma\,;\ x)=\sum_0^n{}_i\,\frac{(-n,\ i)(\gamma+\delta,\ i)}{(\gamma,\ i)\ i\,!}\,x^i$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{x^\gamma\,\Gamma(\gamma+\delta)}\sum_0^n{}_i(-1)^i\binom{n}{i}\frac{\Gamma(\gamma+\delta+i)}{\Gamma(\gamma+i)}\,x^{\gamma+i}$$

$$=\frac{(-1)^n\Gamma(\gamma)}{x^\gamma\,\Gamma(\gamma+\delta)}\sum_0^n{}_i(-1)^i\binom{n}{i}\frac{\Gamma(\gamma+\delta+n-i)}{\Gamma(\gamma+n-i)}\,x^{\gamma+n-i},$$

e, considerando δ indipendente da γ, segue la relazione

$$F(-n,\ \gamma+\delta\,;\ \gamma\,;\ x)=\frac{(-1)^n\Gamma(\gamma)}{x^\gamma\,\Gamma(\gamma+\delta)}\,\Delta_\gamma^n\,\frac{\Gamma(\gamma+\delta)x^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \tag{6}$$

Posto $x=\dfrac{x}{\delta}$, poichè

$$\lim_{\delta\to\infty}F\left(-n,\ \gamma+\delta\,;\ \gamma\,;\ \frac{x}{\delta}\right)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)}\,n\,!\ L_n^{(\gamma-1)}(x)$$

e

$$\lim_{\delta\to\infty}\frac{\Gamma(\gamma+\delta)}{\Gamma(\delta)\,\delta^\gamma}=1,$$

dalla [6], facendo ancora $\gamma=\alpha+1$, discende la [3].

3. Ciò premesso passiamo alle applicazioni.

Si consideri la differenza n–esima di un prodotto

$$\Delta_\gamma^n[f(\gamma)\cdot g(\gamma)]=\sum_0^n{}_i\binom{n}{i}\Delta_\gamma{}^{n-i}f(\gamma+i)\cdot\Delta_\gamma{}^i g(\gamma)$$

e si applichi per

$$f(\gamma)=\frac{\nu^{\gamma+\lambda}\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+\lambda)},\qquad g(\gamma)=\frac{x^{\gamma+\lambda}\Gamma(\gamma+\delta)}{\Gamma(\gamma)}.$$

Si ha

$$\Delta_\gamma^n\,\frac{(\nu x)^{\gamma+\lambda}\Gamma(\gamma+\delta)}{\Gamma(\gamma+\lambda)}=\sum_0^n{}_i\binom{n}{i}\Delta_\gamma{}^{n-i}\frac{\nu^{\gamma+\lambda+i}\Gamma(\gamma+i)}{\Gamma(\gamma+\lambda+i)}\cdot\Delta^i{}_\gamma\,\frac{x^{\gamma+\lambda}\Gamma(\gamma+\delta)}{\Gamma(\gamma)},$$

e successivamente, per la [6], segue la formula di moltiplicazione

$$\begin{aligned}F(-n,\gamma+\delta\,;\gamma+\lambda\,;\nu x)=\sum_0^n{}_i\binom{n}{i}\frac{(\gamma,\ i)}{(\gamma+\lambda,\ i)}&F(-n+i,\ \gamma+i\,;\gamma+\lambda+i\,;\nu)\cdot\\ \cdot\,\nu^i\cdot F(-i,\ \gamma+\delta\,;\ \gamma\,;\ x).&\end{aligned} \tag{7}$$

Per $x = \frac{x}{\delta}$ e $\delta \to \infty$ si ha, con $\gamma = \alpha + 1$,

$$[8]\ L_n^{(\alpha+\lambda)}(\nu x) = \sum_0^n {}_i \binom{\alpha+\lambda+n}{n-i} \nu^i F(-n+i,\ \alpha+i+1\,;\ \alpha+\lambda+i+1\,;\ \nu) L_i^{(\alpha)}(x),$$

formula trovata per altra via da FELDHEIM e comunicatami il 14 marzo 1941.

Seguendo poi lo stesso procedimento, ma invertendo f con g, si trova l'altra formula di moltiplicazione

$$[9]\quad F(-n, \gamma+\delta\,; \gamma+\lambda\,; \nu x) = \sum_0^n {}_i \binom{n}{i} \frac{(\gamma+\delta, i)}{(\gamma, i)} F(-n+i,\ \gamma+\delta+i\,;\ \gamma+i\,;\ x) \cdot$$
$$\cdot\, x^i \cdot F(-i,\ \gamma;\ \gamma+\lambda;\ \nu),$$

e da questa discende la particolare

$$[10]\quad L_n^{(\gamma+\lambda-1)}(\nu x) = \frac{(\gamma+\lambda,\ n)}{(\gamma,\ n)} \sum_0^n {}_i \frac{F(-i,\ \gamma;\ \gamma+\lambda;\ \nu)}{i\,!} x^i L_{n-i}^{(\gamma+i-1)}(x).$$

La [8], a parte il procedimento di FELDHEIM, che non conosco, si può pure ottenere dalla formula generale di ERDÉLYI

$$L_{\tau_1}^{(\alpha_1)}(\nu_1 x) \ldots L_{\tau_n}^{(\alpha_n)}(\nu_n x) = \sum_0^{\tau_1+\ldots+\tau_n} {}_i\ c_i L_i^{(\alpha)}(x),$$

con

$$c_i = \frac{(1+\alpha_1,\ \tau_1)\ldots(1+\alpha_n,\ \tau_n)}{\tau_1\,!\ldots\tau_n\,!} F_A(1+\alpha\,;\ -\tau_1, \ldots,\ -\tau_n,\ -i\,;$$
$$1+\alpha_1, \ldots,\ 1+\alpha_n,\ 1+\alpha\,;\ \nu_1, \ldots,\ \nu_n,\ 1).$$

Infatti per $n=1$, $\tau_1 \equiv \tau$, $\nu_1 \equiv \nu$, si ha

$$L_\tau^{(\alpha_1)}(\nu x) = \sum_0^\tau {}_i\ c_i L_i^{(\alpha)}(x)$$

con

$$c_i = \frac{(1+\alpha_1,\ \tau)}{\tau\,!} F_2(1+\alpha\,;\ -\tau,\ -i\,;\ 1+\alpha_1,\ 1+\alpha\,;\ \nu,\ 1).$$

E poichè

$$F_2(\alpha\,;\ \beta,\ \beta'\,;\ \gamma,\ \alpha\,;\ x,\ y) = (1-y)^{-\beta'} F_1\left(\beta\,;\ \alpha-\beta',\ \beta'\,;\ \gamma\,;\ x,\ \frac{x}{1-y}\right)$$

si ha pure

$$c_i = \frac{(1+\alpha_1,\ \tau)}{\tau\,!} \lim_{y\to 1} (1-y)^i F_1\left(-\tau\,;\ \alpha+i+1,\ -i\,;\ 1+\alpha_1\,;\ \nu,\ \frac{\nu}{1-y}\right).$$

Sviluppata la funzione F_1 ed eseguito il limite si ottiene

$$c_i = \binom{\alpha_1+\tau}{\tau-i} \nu^i F(-\tau+i,\ \alpha+i+1\,;\ \alpha_1+i+1\,;\ \nu),$$

e quindi la [8], con qualche semplice mutamento di notazioni.

Un caso particolarissimo e noto della [8] è quello che si ottiene per $\nu = 1$, e si ha la formula

$$[11] \qquad L_n^{(\alpha+\lambda)}(x) = \sum_0^n{}_i \binom{\lambda + n - i - 1}{n - i} L_i^{(\alpha)}(x),$$

che può pure presentarsi nella forma integrale di KOGBETLIANTZ (²)

$$[12] \quad L_n^{(\alpha+\lambda)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \lambda + n + 1)x^{-\alpha-\lambda}}{\Gamma(\alpha + n + 1)\Gamma(\lambda)} \int_0^x (x - u)^{\lambda-1} u^\alpha L_n^{(\alpha)}(u) du .$$

Facendo in questa $x = \nu x$ si ottiene subito la forma integrale della [8]; e più in generale, alla [7] corrisponde la

$$[13] \quad \begin{aligned} F(-n, \gamma + \delta ; \gamma + \lambda ; \nu x) = \frac{\Gamma(\gamma + \lambda)(\nu x)^{-\gamma-\lambda+1}}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\lambda)} \cdot \\ \int_0^{\nu x} (\nu x - u)^{\lambda-1} u^{\gamma-1} F(-n, \gamma + \delta ; \gamma ; u) du . \end{aligned}$$

Questa relazione integrale si può pure ottenere con il metodo fissato nei § 1, 2, a partire dall'altra che definisce la funzione Beta euleriana di prima specie

$$B(\gamma, \lambda) = \int_0^1 y^{\gamma-1}(1 - y)^{\lambda-1} dy = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\gamma + \lambda)} .$$

Basta porre $y = \dfrac{u}{\nu x}$, moltiplicare per $\Gamma(\gamma + \delta)$, applicare l'operatore $\Delta_\gamma{}^n$, e pervenire alla forma

$$\frac{\Gamma(\lambda)}{\nu x} \Delta_\gamma{}^n \frac{\Gamma(\gamma + \delta)(\nu x)^{\gamma+\lambda}}{\Gamma(\gamma + \lambda)} = \int_0^{\nu x} (\nu x - u)^{\lambda-1} \frac{1}{u} \Delta_\gamma{}^n \frac{\Gamma(\gamma + \delta) u^\gamma}{\Gamma(\gamma)} du ;$$

chè la [6] ci condurrà subito alla [13].

4. A partire dalla semplice relazione integrale

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} x^r dx = \frac{\Gamma(r + 1)}{\lambda^{r+1}}$$

(²) E. KOGBETLIANTZ, *Recherches sur la sommabilité des séries d'Hermite*, « Annales de l'École normale supérieure » (3), XLIX, 1932. Per i legami tra la [11] e la [12] cfr. L. TOSCANO, *Relazioni tra i polinomi di* LAGUERRE *e di* HERMITE, « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », serie II, anno II, 1940.

si possono dedurre altri risultati, facendo però intervenire il più generale polinomio ipergeometrico

$$
{}_{r+1}F_{s+1}(-n,\ \gamma+\alpha_1,\ldots,\gamma+\alpha_r;\ \gamma,\ \gamma+\beta_1,\ldots,\gamma+\beta_s;\ x) = \\
= \sum_0^n{}_i(-1)^i\binom{n}{i}\frac{(\gamma+\alpha_1,\ i)\ldots(\gamma+\alpha_r,\ i)}{(\gamma,\ i)(\gamma+\beta_1,\ i)\ldots(\gamma+\beta_s,\ i)}x^i,
$$

e considerando l'estensione della [6]

$$
[14] \qquad {}_{r+1}F_{s+1} = \frac{(-1)^n\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma+\beta_1)\ldots\Gamma(\gamma+\beta_s)}{\Gamma(\gamma+\alpha_1)\ldots\Gamma(\gamma+\alpha_r)x^\gamma}\Delta_\gamma^n\frac{\Gamma(\gamma+\alpha_1)\ldots\Gamma(\gamma+\alpha_r)x^\gamma}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma+\beta_1)\ldots\Gamma(\gamma+\beta_s)}.
$$

Si ha infatti

$$
\int_0^\infty e^{-\lambda x}x^\beta\frac{x^\gamma}{\Gamma(\gamma+\beta+1)}dx = \lambda^{-\beta-\gamma-1}
$$

$$
\int_0^\infty e^{-\lambda x}x^\beta\Delta_\gamma^n\frac{\Gamma(\gamma+\alpha)x^\gamma}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma+\beta+1)}dx = \frac{1}{\lambda^{\beta+1}}\Delta_\gamma^n\frac{\Gamma(\gamma+\alpha)}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^\gamma,
$$

da cui (3)

$$
[15] \qquad \int_0^\infty e^{-\lambda x}x^{\beta+\gamma}{}_2F_2(-n,\ \gamma+\alpha;\ \gamma,\ \gamma+\beta+1;\ x)dx = \\
= \frac{\Gamma(\gamma+\beta+1)}{\lambda^{\gamma+\beta+1}}F\left(-n,\ \gamma+\alpha;\ \gamma;\ \frac{1}{\lambda}\right).
$$

Oppure, dalla relazione di partenza si può ricavare

$$
\int_0^\infty e^{-\lambda x}\frac{1}{x}\Delta^n{}_{r+1}\frac{x^{r+1}}{\Gamma(r+1)\Gamma(r+s+1)}dx = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{-s+1}\Delta_r^n\frac{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{r+s}}{\Gamma(r+s+1)},
$$

da cui

$$
[16] \qquad \int_0^\infty e^{-\lambda x}x^r{}_1F_2(-n;\ r+1,\ r+s+1;\ x)dx = \\
= (-1)^n n!\frac{\Gamma(r+1)\Gamma(r+s+1)}{\Gamma(r+s+n+1)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{r+1}L_n^{(r+s)}\left(\frac{1}{\lambda}\right).
$$

Per $s=0$ si ha

$$
[17] \qquad \int_0^\infty e^{-\lambda x}x^r{}_1F_2(-n;\ r+1,\ r+1;\ x)dx = \\
= (-1)^n n!\frac{[\Gamma(r+1)]^2}{\Gamma(r+n+1)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{r+1}L_n^{(r)}\left(\frac{1}{\lambda}\right).
$$

(3) Questa relazione trovasi, con qualche errore di stampa, in H. Bateman, *Two systems of polynomials for the solution of Laplace's integral equation*, « Duke Mathematical Journal », vol. 2, 1936.

5. Vediamo ora che cosa si può dedurre applicando lo sviluppo

$$D = \sum_{1}^{\infty}{}_i \frac{(-1)^{i-1}}{i} \Delta^i$$

alla funzione di γ

$$\frac{\Gamma(\gamma+\delta)x^\gamma}{\Gamma(\gamma)}.$$

Si ha

$$D_\gamma \frac{\Gamma(\gamma+\delta)x^\gamma}{\Gamma(\gamma)} = \sum_{1}^{\infty}{}_i \frac{(-1)^{i-1}}{i} \Delta^i{}_\gamma \frac{\Gamma(\gamma+\delta)x^\gamma}{\Gamma(\gamma)},$$

e per la [6] segue

$$D_\gamma \frac{\Gamma(\gamma+\delta)x^\gamma}{\Gamma(\gamma)} = -\frac{\Gamma(\gamma+\delta)x^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \sum_{1}^{\infty}{}_i \frac{1}{i} F(-i,\ \gamma+\delta;\ \gamma;\ x).$$

Inoltre, denotando con $\psi(\alpha)$, secondo le notazioni di GAUSS, la derivata logaritmica di $\Gamma(\alpha+1)$, cioè

$$\psi(\alpha) = D_\alpha \log\Gamma(\alpha+1),$$

si ricava

$$D_\gamma \frac{\Gamma(\gamma+\delta)x^\gamma}{\Gamma(\gamma)} = \frac{\Gamma(\gamma+\delta)\psi(\gamma+\delta-1)x^\gamma}{\Gamma(\gamma)} + \frac{\Gamma(\gamma+\delta)x^\gamma}{\Gamma(\gamma)}[\log x - \psi(\gamma-1)].$$

E sostituendo sopra si ottiene lo sviluppo ($\gamma \geq 1$, $\gamma+\delta \geq 1$, $x > 0$)

[18] $$\psi(\gamma-1) - \psi(\gamma+\delta-1) - \log x = \sum_{1}^{\infty}{}_i \frac{1}{i} F(-i,\ \gamma+\delta;\ \gamma;\ x).$$

Posto $\gamma = \alpha+1$, $x = \frac{x}{\delta}$, e procedendo al limite per $\delta \to \infty$, poichè

$$\lim_{u\to\infty} [\psi(u) - \log u] = 0$$

e

$$\lim_{\delta\to\infty} [\psi(\alpha+\delta) - \log\delta] = \lim_{\delta\to\infty} [\psi(\alpha+\delta) - \log(\alpha+\delta)] + \\ + \lim_{\delta\to\infty} \log\left(1+\frac{\alpha}{\delta}\right) = 0,$$

segue lo sviluppo particolare

[19] $$\frac{\psi(\alpha) - \log x}{\Gamma(\alpha+1)} = \sum_{1}^{\infty}{}_i \frac{(i-1)!}{\Gamma(\alpha+i+1)} L_i^{(\alpha)}(x).$$

E da questo, per $\alpha = 0$, si deduce (4)

[20] $$-C - \log x = \sum_{1}^{\infty}{}_i \frac{L_i(x)}{i},$$

essendo $C = 0{,}577...$ la costante di EULERO.

(4) Tra i lavori recenti cfr. J. SER, *Les séries de polynomes de Laguerre*, « Bulletin des Sciences mathématiques », 2e série, t. LXI, 1937. È anche utile cfr. la nota di G. N. WATSON, *Über eine Reihe aus verallgemeinerten*

Lo sviluppo [18], fermo restando il nostro metodo di ricerca, si può ancora ricavare per via diversa, che ci consentirà di stabilire altri risultati.

Consideriamo la funzione di γ

$$\frac{\Gamma(\gamma+\delta+\lambda)x^{\gamma+\lambda}}{\Gamma(\gamma+\lambda)}$$

e sviluppiamola con la formula di interpolazione di NEWTON. Si ha

$$\frac{\Gamma(\gamma+\delta+\lambda)x^{\gamma+\lambda}}{\Gamma(\gamma+\lambda)}=\sum_{0}^{\infty}{}_i\binom{\lambda}{i}\Delta_\gamma{}^i\frac{\Gamma(\gamma+\delta)x^\gamma}{\Gamma(\gamma)}$$

e per la [6] segue ($\lambda\geq 0$, $\gamma\geq 1$, $\gamma+\delta\geq 1$, $x>0$)

$$\text{[21]}\qquad \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma+\delta+\lambda)x^\lambda}{\Gamma(\gamma+\lambda)\Gamma(\gamma+\delta)}=\sum_{0}^{\infty}{}_i(-1)^i\binom{\lambda}{i}F(-i,\gamma+\delta;\gamma;x).$$

Derivando poi questo ultimo sviluppo rispetto a λ, e, facendo infine $\lambda=0$, si ottiene la [18]. Se invece alla [21] si applica l'operatore $\Delta_\lambda{}^n$ si ottiene

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+\delta}\,\Delta_\lambda{}^n\frac{\Gamma(\gamma+\delta+\lambda)x^{\gamma+\lambda}}{\Gamma(\gamma+\lambda)}=x^\gamma\sum_{0}^{\infty}{}_i(-1)^iF(-i,\gamma+\delta;\gamma;x)\Delta_\lambda{}^n\binom{\lambda}{i},$$

e da questa risulta lo sviluppo

$$\text{[22]}\qquad \begin{aligned}&\frac{(-1)^n\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma+\delta+\lambda)x^\lambda}{\Gamma(\gamma+\delta)\Gamma(\gamma+\lambda)}F(-n,\gamma+\delta+\lambda;\gamma+\lambda;x)=\\&=\sum_{n}^{\infty}{}_i(-1)^i\binom{\lambda}{i-n}F(-i,\gamma+\delta;\gamma;x).\end{aligned}$$

Per $\gamma=\alpha+1$, $x\equiv\frac{x}{\delta}$ e $\delta\to\infty$, dalla [21] si ottiene ($\lambda\geq 0$, $\alpha\geq 0$, $x>0$)

$$\text{[23]}\qquad \frac{x^\lambda}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)}=\sum_{0}^{\infty}{}_i(-1)^i\frac{i!}{\Gamma(\alpha+i+1)}\binom{\lambda}{i}L_i^{(\alpha)}(x),$$

che per $\alpha=0$ si riduce allo sviluppo noto (5)

$$\text{[24]}\qquad \frac{x^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}=\sum_{0}^{\infty}{}_i(-1)^i\binom{\lambda}{i}L_i(x).$$

Laguerre'schen Polynomen, « Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathem.-naturw. Klasse », II_a, 147 Bd., 1938. Per la somma $\sum_{1}^{n}{}_i\frac{L_i(x)}{i}$, cfr. A. A. NIJLAND, *Over een bijzondere soort van geheele functiën*, Utrecht, J. Van Boekhoren, 1896.

(5) S. WIGERT, *Contributions à la théorie des polynomes d'Abel-Laguerre*, « Arkiv för Matematik », Band 15, n. 25, Stockholm, 1921.

E dalla [22] si ottiene

$$[25] \qquad \frac{(-1)^n n!\, x^\lambda}{\Gamma(\alpha+\lambda+n+1)} L_n^{(\alpha+\lambda)}(x) = \sum_{n}^{\infty}{}_i (-1)^i \frac{i!}{\Gamma(\alpha+i+1)} \binom{\lambda}{i-n} L_i^{(\alpha)}(x).$$

6. Lo sviluppo con operatori, del precedente paragrafo, ammette l'inverso

$$\Delta = \sum_{1}^{\infty}{}_i \frac{D^i}{i!},$$

e più in generale [6]

$$\underset{\mu}{\Delta} = \sum_{1}^{\infty}{}_i \frac{\mu^i D^i}{i!}$$

con

$$\underset{\mu}{\Delta} f(u) = f(u+\mu) - f(u).$$

E pur scostandoci alquanto dal piano di questa nota, facciamo qualche semplice applicazione. Per la funzione $x^\alpha e^{-x}$ si ha

$$\underset{\mu}{\Delta_x} x^\alpha e^{-x} = \sum_{1}^{\infty}{}_i \frac{\mu^i D^i_x}{i!} x^\alpha e^{-x},$$

e applicando la [2] e facendo $\mu = tx$ segue [7]

$$[26] \qquad (1+t)^\alpha e^{-tx} = \sum_{0}^{\infty}{}_i t^i L_i^{(\alpha-i)}(x).$$

Per la funzione $e^{-\frac{x^2}{2}}$, introducendo i polinomi di Hermite

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} D_x^n e^{-\frac{x^2}{2}},$$

([6]) Tutti questi sviluppi sono casi particolari dell'altro

$$\left(\frac{h}{k}\right)^n \underset{k}{\Delta^n} = \sum_{n}^{\infty}{}_i \frac{n!}{i!} a_{i,n}^{\left(1-\frac{k}{h}\right)} \underset{h}{\Delta^i},$$

che può anche assumere la forma

$$\underset{k}{\Delta^n} = \sum_{n}^{\infty}{}_i \frac{n!}{i!} \left(\frac{k}{h}\right)^i \alpha_{i,n}^{\left(1-\frac{h}{k}\right)} \underset{h}{\Delta^i},$$

e le cui quantità $a_{i,n}^{\left(1-\frac{k}{h}\right)}$ e $\alpha_{i,n}^{\left(1-\frac{h}{k}\right)}$ sono state ampiamente studiàte nel mio lavoro *Numeri di Stirling generalizzati, Operatori differenziali e polinomi ipergeometrici*, « Memorie Pontificia Accademia delle Scienze », Anno III, Vol. III, 1939.

([7]) L. Toscano, *Formule di addizione e moltiplicazione sui polinomi di Laguerre*, « Atti Reale Accademia delle Scienze di Torino », Vol. 76, 1941.

si ritrova lo sviluppo fondamentale

[27] $$e^{\mu x - \frac{\mu^2}{2}} = \sum_0^\infty{}_i \frac{\mu^i}{i!} H_i(x).$$

7. Ritorniamo ora al metodo di ricerca seguito, e vediamo di legare la funzione di BESSEL ai polinomi di LAGUERRE. Per definizione si ha

$$J_\alpha(2\sqrt{ux}) = \sum_0^\infty{}_i \frac{(-1)^i (ux)^{\frac{\alpha}{2}+i}}{i!\,\Gamma(\alpha+i+1)},$$

e questa si può scrivere

$$u^{-\frac{\alpha}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{ux}) = \left\{ \sum_0^\infty{}_i \frac{(-u^i\theta_\alpha{}^i)}{i!} \right\} \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},$$

con

$$\theta_\alpha f(\alpha) = f(\alpha+1).$$

Si ha ancora

[28] $$u^{-\frac{\alpha}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{ux}) = e^{-u\theta_\alpha} \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},$$

e poichè

$$\theta_\alpha = 1 + \Delta_\alpha,$$

si ricava la notevole formula simbolica

[29] $$e^u u^{-\frac{\alpha}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{ux}) = e^{-u\Delta_\alpha} \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Da questa ultima segue

$$e^u u^{-\frac{\alpha}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{ux}) = \left\{ \sum_0^\infty{}_i \frac{(-u)^i}{i!} \Delta_\alpha{}^i \right\} \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},$$

e per la [3] si ottiene, con rapidità ed eleganza, il noto sviluppo

[30] $$e^u (ux)^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{ux}) = \sum_0^\infty{}_i \frac{u^i}{\Gamma(\alpha+i+1)} L_i^{(\alpha)}(x).$$

Invertendo la [28] si ha, come è noto,

[31] $$\frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} = u^{-\frac{\alpha}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} \sum_0^\infty{}_i \left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{i}{2}} J_{\alpha+i}(2\sqrt{ux}).$$

Dalla [29], derivando n volte rispetto ad u, si ha

$$(-1)^n \Delta_\alpha{}^n e^{-u\Delta_\alpha} \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} = x^{\frac{\alpha}{2}} D_u{}^n \left[e^u{}_u{}^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{ux}) \right],$$

che, per la [3] e successiva moltiplicazione per $e^{u\Delta_\alpha}$, diventa

$$x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} e^{u\Delta_\alpha} \left\{ x^{\frac{\alpha}{2}} D^n{}_u \left[e^u{}_u{}^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{ux}) \right] \right\}$$

Ma

$$D_u \left[u^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{ux}) \right] = - x^{\frac{1}{2}} u^{-\frac{\alpha+1}{2}} J_{\alpha+1}(2\sqrt{ux}),$$

da cui

$$D_u{}^n \left[u^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{ux}) \right] = (-1)^n x^{\frac{n}{2}} u^{-\frac{\alpha+n}{2}} J_{\alpha+n}(2\sqrt{ux}).$$

Inoltre

$$D_u{}^n \left[e^u{}_u{}^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{ux}) \right] = \sum_0^n{}_j (-1)^j \binom{n}{j} e^u x^{\frac{j}{2}} u^{-\frac{\alpha+j}{2}} J_{\alpha+j}(2\sqrt{ux}).$$

Pertanto

$$x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} \sum_0^\infty{}_i \frac{u^i \theta^i{}_\alpha}{i!} \left[\sum_0^n{}_j (-1)^j \binom{n}{j} \left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{\alpha+j}{2}} J_{\alpha+j}(2\sqrt{ux}) \right].$$

Sviluppando opportunamente il secondo membro, si può scrivere

$$x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} \sum_0^\infty{}_i (-1)^i \left[\sum_0^i{}_s (-1)^s \binom{n}{i-s} \frac{u^s}{s!} \right] \left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{\alpha+i}{2}} J_{\alpha+i}(2\sqrt{ux}),$$

e da questa si perviene allo sviluppo

$$[32] \quad L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\, u^\alpha} \sum_0^\infty{}_i \left[(-1)^i L_i^{(n-i)}(u) \right] \left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{i-\alpha}{2}} J_{\alpha+i}(2\sqrt{ux}),$$

che per $u = n$ appartiene a TRICOMI ([8]).

Più in generale, e per altra via, ho trovato lo sviluppo

$$[33] \quad L_n^{(\alpha)}(x) = e^{hx} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\, u^\alpha} \sum_0^\infty{}_i A_i(h) \left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{i-\alpha}{2}} J_{\alpha+i}(2\sqrt{ux}) \quad h > 0$$

con

$$A_i(h) = h^{i-n} \sum_0^n{}_k \binom{n}{k} (h-1)^{n-k} L_i^{-(\alpha+i+k+1)}\left(\frac{-u}{h}\right),$$

e anche questo per $u = n$ appartiene a TRICOMI.

8. Terminiamo generalizzando lo sviluppo [30]. Ai due membri di tale sviluppo applichiamo l'operatore $e^{-u\Delta_\lambda}$ e si ha

$$e^{-u\Delta_\lambda} \frac{x^\lambda}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)} = \sum_0^\infty{}_i \frac{(-1)^i\, i!}{\Gamma(\alpha+i+1)} e^{-u\Delta_\lambda} \binom{\lambda}{i} L_i^{(\alpha)}(x).$$

([8]) F. TRICOMI, *Sviluppo dei polinomi di Laguerre e di Hermite in serie di funzioni di Bessel*, « Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari », Anno XII. 1941.

Per la [4] è

$$e^{-u\Delta_\lambda}\binom{\lambda}{i} = L_i^{(\lambda-i)}(u),$$

e per la [29] è

$$e^{-u\Delta_\lambda}\frac{x^\lambda}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)} = e^u \frac{x^{\frac{\lambda-\alpha}{2}}}{u^{\frac{\lambda+\alpha}{2}}} J_{\alpha+\lambda}(2\sqrt{ux}).$$

Vale pertanto lo sviluppo

$$[34] \qquad e^u \frac{x^{\frac{\lambda-\alpha}{2}}}{u^{\frac{\lambda+\alpha}{2}}} J_{\alpha+\lambda}(2\sqrt{ux}) = \sum_0^\infty{}_i \frac{(-1)^i i!}{\Gamma(\alpha+i+1)} L_i^{(\lambda-i)}(u) L_i^{(\alpha)}(x),$$

che si riduce al [30] per $\lambda = 0$.