Bollettino Unione Matematica Italiana

Giuseppe Palamà

Somme uguali di biquadrati

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.4, p. 417–422.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_4_417_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1949.

Somme uguali di biquadrati.

Nota di GIUSEPPE PALAMÀ (a Lecce).

Sunto. - *Si applica il metodo classico di* FERMAT *per trovare soluzioni intere di* $x_1^4 + \dots + x_n^4 = y_1^4 + \dots + y_m^4$, $n \geq 2$, $m \geq 3$.

In un recente lavoro E. STORCHI [1] dà interessanti identità del tipo

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^4 = \sum_{i=1}^{n} b_i^4, \tag{1}$$

per $m = n = 3$; $m = n = 4$; $m = n = 5$, $m = 6$, $n = 2$.

Ci permettiamo però di osservare che oltre alle tre note identità del tipo della (1) per $m = n = 3$, riportate nel suddetto lavoro, si conoscono delle altre [2]; e che l'identità del BINI [3] è stata

(1) E. STORCHI, *Uguaglianze fra somme di biquadrati*, « Boll. Un. Mat. It. », serie III, anno III, n. 3, (dic. 1948), pp. 220-3.

(2) Cfr. per es.: A. S. WEREBRUSOW, « L'Int. des Math. », 20, (1913), pp. 105-6, in cui vi sono alcune identità del tipo della (1) del testo per $m = n = 3$, racchiudenti molti parametri; E. MIOT che in Idem, 21, (1914), pp. 155-6, ne diede un'altra con un solo parametro; A. GERARDIN, Idem, 19, (1912), p. 254.

Sono poi numerose le identità parametriche conosciute del tipo

$$A_1^4 + A_2^4 + A_3^4 = B_1^4 + B_2^4 + B_3^4,$$

per i cui numeri A_i, B_i si ha inoltre

$$A_1^n + A^n{}_2 + A_3^n = B_1^n + B_2^n + A_3^n,$$

nei casi:

$$\text{a)}\quad n = 2; \qquad \text{b)}\quad n = 1,\ 2.$$

Per alcuni metodi onde stabilirle, cfr. G. PALAMÀ, *Metodi per avere soluzioni prametriche della* $a_1, \dots, a_p \overset{2,4}{=} b_1, \dots, b_p$, *nei casi* $p = 3$, $p = 4$, « Rend. Mat. e delle sue Applic. », fasc. 1°, (1947).

Identità parametriche invece del tipo della (1) del testo per $m = n$ anche con vari metodi sono state trovate da R. MORRIE, [Università di St. Andrews, 500° Anniversario, Edinburgh, (1911), pp. 62-75].

(3) Cfr. per es., nel loc. cit. in (1), la (2).

corretta da A. GÉRARDIN [4] e dal WELSCH [5], rispettivamente così:

$$(A - B)^4 + (C - B)^4 + E^4 = (A + B)^4 + (C - D)^4 + F^4,$$
$$(A - B)^4 + (C - D)^4 + E^4 = (A + B)^4 + (C + D)^4 + F^4,$$

ove

$$A,\ C = a(d \pm c); \qquad B,\ D = b(c \mp 3d); \qquad E,\ F = 2(bc \mp ad).$$

La questione poi di trovare identità del tipo della (1) nel caso generale di n, m qualsiasi, purchè sia però $n \geq 2$, $m \geq 3$ è stata studiata per es. da L. BASTIEN [6] che del sistema

$$(2) \qquad x_1^4 + \dots + x_n^4 = y_1^4 + \dots + y_m^4, \qquad n \geq 2, \qquad m \geq 3;$$

ha dato la seguente soluzione

$$y_1,\ x_1 = \rho^3(\nu^4\rho^4\sigma \pm 8\tau\mu^4); \qquad y_2,\ x_2 = \nu^3(\rho^3\sigma \mp 8\tau\mu^4);$$
$$x_i,\ y_j = 8\nu\rho^2\mu^3\tau(\alpha_i,\ \beta_j); \qquad i = 3, \dots, n;\ j = 3, \dots, m,$$

con

$$\tau = \nu^8 - \rho^8, \qquad \sigma = \beta_3^4 + \dots + \beta_m^4 - \alpha_3^4 - \dots - \alpha_n^4.$$

Sarebbe forse superfluo rilevare che a soluzioni parametriche della (2), nelle stesse ipotesi per n ed m del caso generale precedente, si può pervenire applicando il metodo di FERMAT. Noi faremo però questa ovvia applicazione, sia perchè non ci consta che tale metodo sia stato applicato a questo tipo così generale di equazione, e sia perchè se ne possono ricavare interessanti identità di vari tipi, senza che siano richiesti particolari accorgimenti.

1. Assumiamo perciò in (2) $n = m = k + 1$,

$$y_j = a_j, \qquad (j = 1, \dots, k),$$

essendo $a_1, \dots, a_k$ parametri arbitrari, possiamo

$$(3) \qquad \begin{cases} x_i = a_i + p_i t, & (i = 1, \dots, k), \\ y_{k+1} = a_{k+1} + p_{k+1} t, \end{cases}$$

ed annulliamo poi inoltre i coefficienti di t e di t^2, abbiamo così

$$(4) \qquad a^3_{k+1} p_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} a_i^3 p_i;$$

$$(5) \qquad a^2_{k+1} p^2_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} a_i^2 p_i^2,$$

(4) Cfr. A. GÉRARDIN, cit. in (2).

(5) Cfr. « L'Int. des Math. », 19, (1912), p. 132 e p. 184.

(6) Cfr. « Sphinx-Oedipe », 8, (1913), pp. 154-5. R. NORRIE, nel loc. cit. in (2), ha anche stabilito una identità del tipo $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^4 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i^4$ che per $\lambda_i = \mu_i = 1$ ha la forma di quella che si cerca nel testo.

$$(6) \qquad 4(a_{k+1}p^3_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} a_i p_i^3) = t(-p^4_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} p_i^4).$$

Dalla (4) si ricava

$$(7) \qquad p_{k+1} = \frac{1}{a^3_{k+1}} \sum_{i=1}^{k} a_i^3 p_i,$$

e dalla (5), postovi

$$(8) \qquad a_{k+1}p_{k+1} = a_1 p_1 + \alpha,$$

in cui α è un nuovo parametro, invece otteniamo

$$(9) \qquad p_1 = \frac{1}{2\alpha a_1} \sum_{i=2}^{k} (a_i^2 p_i^2 - \alpha^2).$$

Se ora sostituiamo questo valore di p_1, nella (8), abbiamo la

$$(10) \qquad p_{k+1} = \frac{\sum_{i=2}^{k} (a_i^2 p_i^2 + \alpha^2)}{2\alpha a_{k+1}},$$

che, confrontata con la (7), ci dà

$$(11) \qquad a^2_{k+1} \sum_{i=2}^{k} (a_i^2 p_i^2 + \alpha^2) = a_1^2 \sum_{i=2}^{k} (a_i^2 p_i^2 - \alpha^2) + 2\alpha \sum_{i=2}^{k} a_i^3 p_i .$$

Quindi se i parametri p_i ed α soddisfano a quest'ultima, alla (9) ed alla (10), o invece che a quest'ultima alla (7) o meglio ancora alla (8), a mezzo della (6), che ci dà t, e delle (3) si ha solnzione dell'equazione proposta.

Pertanto la questione è ridotta a determinare i parametri in modo che soddisfino alla (11).

2. In vari modi si può soddisfare alla (11), ma la maniera più semplice è di assumere per es. $a_{k+1} = a_1$, perchè allora la (11), diventando di 1° grado in α, ci dà subito

$$(12) \qquad \alpha = \frac{1}{a_1^2} \sum_{i=2}^{k} a_i^3 p_i,$$

e pertanto in tal caso la nostra questione è risolta e le incognite risultano espresse in funzione dei parametri $a_1, \dots, a_k, p_2, \dots, p_k$.

3. Il procedimento seguito nei numeri precedenti ha interesse quando si vogliono soluzioni razionali della

$$x_1^4 + \dots + x_k^4 = b_1^4 + \dots + b^4_{k-1} + y^4$$

essendo le b_i numeri dati, o meglio, quando dai risultati generali si vogliono ottenere delle formule valevoli per alcuni casi più semplici ma non meno interessanti.

Così se per es. nel caso $a_{k+1} = a_1$, si ritiene inoltre

$$a_3 = a_4 = \dots = a_k = 0, \tag{13}$$

si ricava subito dalle formule precedenti, se poniamo

$$a_2 = ma_1, \qquad p_i = n_i p_2, \qquad (i = 3, \dots, k),$$

l'identità

$$[m^4(m^8 - 1) - 2d]^4 + [m(m^8 + 2d - 1)]^4 + [2m(m^8 - 1)n_3]^4 + \dots +$$
$$+ [2m(m^8 - 1)n_k]^4 = [m(m^8 - 2d - 1)]^4 + [m^4(m^8 - 1) + 2d]^4, \quad (k \geq 3),$$

che sussiste per n_i ed m arbitrari, purchè si assuma

$$d = n_3^4 + \dots + n_k^4.$$

Se per es. nell'ultima poniamo

$$k = 3, \qquad m = 2, \qquad n_3 = 1,$$

abbiamo la

$$257^4 + 510^4 + 2039^4 = 253^4 + 2041^4$$

4. Se invece delle (13) si suppone

$$a_{r+1} = \dots = a_k = 0,$$

si ha soluzione parametrica di

$$x_1^4 + \dots + x_k^4 = y_1^4 + \dots + y_r^4. \tag{14}$$

5. Il metodo di Fermat consente di soddisfare agevolmente a quest'ultima equazione a mezzo delle posizioni, se $a_1, \dots, a_k$ sono numeri arbitrari:

$$x_i = a_i + p_i t, \qquad y_i = a_i + q_i t, \qquad (i = 1, \dots, r), \tag{15}$$
$$x_i = p_i t, \qquad (i = r + 1, \dots, k).$$

Così per es., per avere infinite soluzioni di (14) quando è $k = r$, ($r > 2$, nel caso $r = 2$, si ha banale identità), basta servirsi delle sole (15). Infatti sostituendo in tal caso nella (14) i valori di x_i, y_i dati dalle (5), si ha se si anullano i coefficienti di t e t^2

$$a_1^3 q_1 + \dots + a_r^3 q_r = a_1^3 p_1 + \dots + a_r^3 p_r, \tag{16}$$

$$a_1^2 q_1^2 + \dots + a_r^2 q_r^2 = a_1^2 p_1^2 + \dots + a_r^2 p_r^2. \tag{17}$$

Ora si noti che tutte le soluzioni della (17) si hanno assumendo

$$(18)\qquad a_i q_i = a_i p_i + \alpha_i, \qquad (i = 1, \dots, r),$$

essendo α_i dei nuovi parametri, e si ha così allora dalle (17) e (16) rispettivamente

$$(19)\qquad \alpha_1^2 + \dots + \alpha_r^2 + 2a_1 p_1 \alpha_1 + \dots + 2a_r p_r \alpha_r = 0$$

$$(20)\qquad a_1^2 \alpha_1 + \dots + a_r^2 \alpha_r = 0.$$

La (20) e la (19) danno poi

$$(21)\qquad \alpha_1 = -\frac{1}{a_1^2}(a_2^2 \alpha_2 + \dots + a_r^2 \alpha_r),$$

$$(21)\qquad p_1 = -\frac{1}{2a_1 \alpha_1}(\alpha_1^2 + \dots + \alpha_r^2 + 2a_2 p_2 \alpha_2 + \dots + 2a_r p_r \alpha_r).$$

Ma la (14), (per $k = r$), con le (15), per le (16), (17), dà

$$(23)\qquad t = 4 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{r} a_i (q_i^3 - p_i^3)}{\sum_{i=1}^{r} (p_i^4 - q_i^4)},$$

quindi con le (21), (22), (18), (15) e (23), si ha una soluzione parametrica della nostra equazione.

Si noti che i parametri arbitrari sono $3r - 2$ e cioè $a_1, \dots, a_r$, $p_2, \dots, p_r, \alpha_2, \dots, \alpha_r$.

Se per es. si fa:

1° $r = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_3 = 2$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$, $p_2 = 1$, $p_3 = 0$, si ha la

$$2^4 + 31^4 + 47^4 = 1^4 + 14^4 + 49^4;$$

2° $r = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 1$, $p_2 = p_3 = 0$ si ricava l'altra

$$71^4 + 142^4 + 457^4 = 2^4 + 359^4 + 407^4.$$

Con i risultati ottenuti in questo numero possono agevolmente determinarsi identità per $r = 3, 4, 5, \dots$ in funzione rispettivamente di 7, 10, 13,... parametri cui però in parte possono anche attribuirsi valori particolari.

6. Se il classico metodo di FERMAT ci fornisce soluzione parametrica della (2) per $n \geq 2$, $m \geq 3$, e quando si conosca una della (2), per $m = n = 2$, ce ne può dare infinite, cade in difetto però quando si vogliono trovare soluzioni della

$$x_1^4 + \ldots + x_n^4 = y^4. \tag{24}$$

È perciò che per soddisfare ad essa si sono cercate con vari metodi opportune identità (7). Ma il caso più interessante della (24) è quello di $n = 4$. Per tal caso della (24) sembra si conoscono soltanto le due seguenti identità (8)

$$30^4 + 120^4 + 272^4 + 315^4 = 353^4, \tag{25}$$

$$247^4 + 340^4 + 430^4 + 599^4 = 651^4. \tag{26}$$

Ora incidentalmente notiamo che sulla congettura di EULERO (9) che la

$$x_1^n + \ldots + x_m^n = y^n \tag{27}$$

è impossibile se $m < n$ e sulla ricerca di una soluzione di essa per $m = n = 6$, ha richiamato recentemente l'attenzione M. RIGNAUX (10). Una soluzione della (27) per $m = n = 5$, e sembra l'unica che oggi si conosca, è la seguente

$$7^5 + 43^5 + 57^5 + 80^5 + 100^5 = 107^5.$$

È interessante pertanto, ma sembra alquanto difficile, la ricerca di soluzioni della (27) per $m = n \geq 6$, se, come sembra, in tali casi essa è possibile.

(7) Cfr. DICKSON, *History of the theory of numbers*, vol. 2°, (1919), pp. 648-53; nelle pp. 653-7 vi sono altre notizie relative all'argomento di questa Nota. Cfr. inoltre G. PALAMÀ in « Inter. Rech. Math. », t. 3, n. 11, (luglio 1947), p. 80.

(8) Per la (25) del testo cfr. R. NORRIE, cit. in (2), p. 89. Ad R. NORRIE stesso sarebbe dovuta la seguente presunta soluzione parametrica della

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = y^4, \tag{I}$$

y, $x_1 = M^4 \pm N^4$, $x_2 = 2MN(M^2 - p^2q^2)$, $x_3 = 2MNpq^3$, $x_4 = 2MNp^3q$, ove M, $N = p^2 \pm q^2$. Ma come ha osservato il WELSCH, [« L'Inter. des Math. », (1914), p. 132], questa soluzione non soddisfa identicamente alla (I) che per $p = 2$, $q = 1$ e darebbe luogo soltanto così alla sola (25) del testo.

Per la (26) del testo invece cfr. PATTERSON, « The American Math. Montly », 48, p. 736.

(9) « Nova Acta Acad. Petrop. », 13, ad annos 1795-6, 1802 (1778); « Comm. Arith. », II; Opora postuma, 1, (1862).

(10) Cfr. « Inter. Rech. Math. », t. 1, fasc. 2, (apr. 1945), p. 39.