Bollettino
Unione Matematica Italiana

Carlo Pucci

Un teorema di derivazione per serie

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.1, p. 20–23.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_1_20_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

SEZIONE SCIENTIFICA

PICCOLE NOTE

Un teorema di derivazione per serie.

Nota di CARLO PUCCI (a Firenze).

Sunto. - *Si da una nuova dimostrazione di un teorema di derivazione per serie precedentemente pubblicato in questo « Bollettino ».*

Il chiarissimo prof. MAURO PICONE, che qui pubblicamente ringrazio, mi ha fatto notare che la dimostrazione del teorema contenuto nella mia nota apparsa in questo « Bollettino » [(3), 4, (1949), pagg. 270-274], si fonda sull'espressione del resto di una formula d'interpolazione che non è corretta. Riporto qui la mia dimostrazione originale che avevo sostituito con la precedente perchè risultava più breve.

a) LEMMA - *In ogni punto di un intervallo* (a, b) *siano definite, per qualsiasi valore intero positivo dell'indice* n, *le funzioni assolutamente continue* $F_n(x)$ *e le loro funzioni derivate* $f_n(x)$. *Se in* (a, b) *la successione* $\{f_n(x)\}$ *diverge uniformemente a* $+\infty$ $(-\infty)$ *si può estrarre dalla successione* $\{F_n(x)\}$ *una successione* $\{F_{n_p}(x)\}$ *uniformemente divergente a* $+\infty$ *o* $-\infty$ *in un intervallo non nullo appartenente ad* (a, b).

Per ipotesi fissato un numero positivo M arbitrario si può corrispondentemente determinare un indice n^0 tale che per $n > n^0$ e $x \subset (a, b)$ sia $f_n(x) > M$.

Indicato con α un punto interno ad (a, b) supponiamo che la successione $\{F_n(\alpha)\}$ contenga infiniti termini non negativi e sia

$\{F_{n_p}(\alpha)\}$ la successione di tali termini. Indicato allora con a' un punto di (a, b) tale che $a' > \alpha$ si ha per $x \subset (a', b)$ e $n_p > n^0$

$$F_{n_p}(x) = F_{n_p}(\alpha) + \int_{\alpha}^{x} f_{n_p}(x)dx > M(a' - \alpha)$$

e ne consegue quindi per l'arbitrarietà di M che la successione $\{F_{n_p}(x)\}$ è uniformemente divergente a $+\infty$ in (a', b).

Se invece la successione $\{F_n(\alpha)\}$ non ha infiniti termini non negativi essa ne ha necessariamente infiniti non positivi e sia allora $\{F_{n_p}(\alpha)\}$ la successione di tali termini. Indicato con b' un punto di (a, b) tale che $b' < \alpha$, si ha per $x \subset (a, b')$ e $n_p > n^0$

$$F_{n_p}(x) = F_{n_p}(\alpha) - \int_{x}^{\alpha} f_{n_p}(x)dx < - M(\alpha - b')$$

e quindi, per l'arbitrarietà di M, la successione $\{F_{n_p}(x)\}$ è uniformemente divergente a $-\infty$ in (a, b').

Analoga è la dimostrazione nell'ipotesi che la successione $\{f_n(x)\}$ diverga uniformemente a $-\infty$ in (a, b).

b) TEOREMA - *In un intervallo* (a, b) *siano definite le funzioni* $f_n(x)$ *con* $n = 1, 2, 3, \dots$, *le quali posseggano derivate fino all'ordine* $r + 1$. *Se la successione* $\{f_n(x)\}$ *converge in un insieme di punti ovunque denso in* (a, b) *e se le funzioni* $f_n^{(r+1)}(x)$, *con* $n = 1, 2, 3, \dots$, *sono equilimitate, allora :*

I. - *le successioni* $\{f_n(x)\}$, $\{f_n^{(p)}(x)\}$ *con* $p = 1, 2, \dots, r$, *convergono uniformemente in* (a, b);

II. - *la funzione* $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ *ha ovunque in* (a, b) *derivate determinate e finite fino all'ordine* r *e si ha* $f^{(p)}(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n^{(p)}(x)$ *per* $p = 1, 2, \dots, r$.

Per ipotesi esiste un numero K tale che per $x \subset (a, b)$ e per qualsiasi valore dell'indice n $|f_n^{(r+1)}(x)| < K$. Proviamo che pure le funzioni $f_n^{(r)}(x)$ sono equilimitate in (a, b). Essendo

$$\left| f_n^{(r)}(x) \right| = \left| \int_a^x f_n^{(r+1)}(x)dx + f_n^{(r)}(a) \right| \leq K(b - a) + \left| f_n^{(r)}(a) \right|$$

basterà provare che è finito $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \, |f_n^{(r)}(a)|$.

Supponiamo per assurdo $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \, |f_n^{(r)}(a)| = +\infty$. Vale allora almeno una delle due relazioni

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} f_n^{(r)}(a) = +\infty, \qquad \underline{\lim_{n \to \infty}} f_n^{(r)}(a) = -\infty$$

e supposto ad es. che si verifichi la prima possiamo allora estrarre dalla successione $\{f_n^{(r)}(a)\}$ una successione $\{f_{n_t}^{(r)}(a)\}$ che diverge a $+\infty$. Essendo

$$f_{n_t}^{(r)}(x) = f_{n_t}^{(r)}(a) + \int_a^x f_{n_t}^{(r+1)}(x)dx > f_{n_t}^{(r)}(a) - K(b-a)$$

ne consegue che la successione $\{f_{n_t}^{(r)}(x)\}$ diverge uniformemente a $+\infty$, in tutto (a, b). Per il lemma precedentemente dimostrato esiste una successione $\{f_{n_s}^{(r-1)}(x)\}$, estratta dalla successione $\{f_{n_t}^{(r-1)}(x)\}$ che diverge uniformente a $+\infty$ o a $-\infty$ in un intervallo non nullo appartenente ad (a, b). Applicando successivamente tale lemma alle successioni $\{f_n^{(r-2)}(x)\}, \ldots, \{f_n'(x)\}, \{f_n(x)\}$ resulterebbe che esiste una successione $\{f_{n_q}(x)\}$ estratta dalla successione $\{f_n(x)\}$ che diverge in un intervallo non nullo appartenente ad (a, b) il che è assurdo dovendo la successione $\{f_n(x)\}$ convergere per ipotesi in un insieme ovunque denso in (a, b). Analogamente si mostrerebbe assurdo il caso $\underline{\lim_{n \to \infty}} f_n^{(r)}(a) = -\infty$.

Si è quindi provato che le funzioni $f_n^{(r)}(x)$, con $n = 1, 2, 3, \ldots$, sono equilimitate in (a, b). Le funzioni $f_n^{(r-1)}(x)$ avendo allora derivate equilimitate in (a, b) sono esse pure equilimitate in (a, b) per la precedente dimostrazione. Per le stesse ragioni sono equilimitate in (a, b) le funzioni $f_n^{(r-2)}(x)$ e in genere le funzioni $f_n^{(p)}(x)$ per $n = 1, 2, 3, \ldots$ e $p = 1, 2, \ldots, r$.

Le funzioni $f_n^{(p)}(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, e $p = 1, 2, \ldots, r$, avendo derivate equilimitate in (a, b), sono pure equicontinue in tale intervallo per un criterio di ARZELÀ [1].

Per un teorema di ASCOLI [2], essendo le funzioni $f_n'(x)$ equicontinue ed equilimitate in (a, b), si può estrarre dalla successione $\{f_n'(x)\}$ delle successioni uniformemente convergenti. Siano $\{f'_{n_t}(x)\}$, $\{f'_{n_s}(x)\}$ due qualsiasi di tali successioni. Posto

$$\lim_{n_t \to \infty} f'_{n_t}(x) = \varphi'_1(x), \qquad \lim_{n_s \to \infty} f'_{n_s}(x) = \varphi_2'(x)$$

(1) V. per es. L. TONELLI, *Fondamenti del calcolo delle variazioni*, vol. I pag. 77.

(2) V. per es. L. TONELLI, op. cit., vol. I, pag. 78.

le $\varphi_1'(x)$, $\varphi_2'(x)$ sono continue in (a, b), e valendo in tal caso l'integrazione per serie si ha per x, $x_1 \subset (a, b)$

$$\lim_{n_t \to \infty} \int_{x_1}^{x} f_{n_t}(x) dx = \lim_{n_t \to \infty} [f_{n_t}(x) - f_{n_t}(x_1)] = \int_{x_1}^{x} \varphi_1'(x) dx = f(x) - f(x_1)$$

$$\lim_{n_s \to \infty} \int_{x_1}^{x} f'_{n_s}(x) dx = \lim_{n_s \to \infty} [f_{n_s}(x) - f_{n_s}(x_1)] = \int_{x_1}^{x} \varphi_2'(x) dx = \varphi(x) - \varphi(x_1)$$

con $f(x)$, $\varphi(x)$ funzioni continue definite dalle relazioni stesse. Scelto il punto x_1 fra i punti di convergenza della successione $\{f_n(x)\}$ ne deriva $f(x_1) = \varphi(x_1)$ e quindi $f(x) = \varphi(x)$ in un insieme ovunque denso in (a, b), ma essendo $f(x)$, $\varphi(x)$ funzioni continue esse coincidono in tutto (a, b). Ne consegue $\varphi_1'(x) = \varphi'_2(x) = f'(x)$.

Mostriamo ora che $\lim_{n \to \infty} f_n'(x) = f'(x)$.

Supposto infatti che esista un punto α ove non valga tale relazione si potrebbe estrarre una successione $\{f'_{n_q}(\alpha)\}$ tale che $\lim_{n_q \to \infty} f'_{n_q}(\alpha) \neq f'(\alpha)$. Allora per il teorema di ASCOLI dalla successione $\{f'_{n_q}(x)\}$ si potrebbe estrarre una successione uniformemente convergente a una funzione $g(x)$ tale che $g(\alpha) \neq f'(\alpha)$, mentre abbiamo mostrato che ogni successione uniformemente convergente estratta da $\{f_n'(x)\}$ converge a $f'(x)$ e quindi deve essere $g(x) = f'(x)$.

Essendo poi in (a, b) le funzioni $f_n'(x)$ equicontinue e la successione $\{f_n'(x)\}$ convergente, tale successione risulta pure uniformemente convergente in (a, b) ([3]).

Valendo un noto teorema d'integrazione per serie per la successione $\{f_n'(x)\}$ anche la successione $\{f_n(x)\}$ è uniformemente convergente a $f(x)$.

Essendo le funzioni $f_n''(x)$ equicontinue ed equilimitate in (a, b) ed essendo convergente la successione $\{f_n'(x)\}$ analogamente si dimostra l'uniforme convergenza della successione $\{f_n''(x)\}$ a $f''(x)$ e così procedendo resta provato in generale l'uniforme convergenza delle successioni $\{f_n^{(p)}(x)\}$ a $f^{(p)}(x)$ con $p = 1, 2, \dots r$.

([3]) V. per es. M. PICONE, *Lezioni di analisi funzionale*, [Roma, 1946-47], pag, 99.