Mauro Picone

Sulla derivazione parziale per serie

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.1, p. 24–33.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_1_24_0>

Sulla derivazione parziale per serie.

Nota di MAURO PICONE (a Roma).

Sunto. - *L'utilità della nota presente mi è apparsa riflettendo un pò su quella, che in questo fascicolo la precede, del dott.* CARLO PUCCI, *nella quale il giovane autore stabilisce un nuovo teorema di derivazione* ordinaria *per serie che io ritengo importante per le applicazioni che può ricevere. Il trasporto di tale teorema alla derivazione* parziale *per serie, scopo precipuo della presente nota, può farsi se si suppongono possedute dal campo su cui si deriva talune proprietà metriche che ho già utilizzato in qualche mio corso e che è forse opportuno pubblicare, come qui faccio.*

1. Notazioni e nomenclatura. Teoremi preliminari. - Denoterò con la lettera x un punto dello spazio euclideo $S_{(n)}$ a n dimensioni, con $x_1, x_2, \dots, x_n$ le coordinate ortogonali di x, con $|x' - x''|$ la distanza euclidea fra due punti x' e x'' di $S_{(n)}$. Dirò che un insieme X di punti di $S_{(n)}$ è un *campo* se è un insieme aperto, su $S_{(n)}$, *coordinata* ogni poligonale di $S_{(n)}$ se ogni suo lato è parallelo ad uno degli assi coordinati a cui è riferito $S_{(n)}$. Se X è un campo connesso di $S_{(n)}$, comunque se ne fissino due punti x' e x'', esistono infinite poligonali coordinate, che indicherò con $\pi(x', x'')$, contenute in X e a quei punti terminate: l'estremo inferiore dell'insieme numerico descritto dal perimetro di $\pi(x', x'')$ sarà chiamato la *distanza perimetrica* (su X) fra i punti x' e x'' e denotata con $|x' - x''|_X$, l'estremo superiore dell'insieme numerico descritto da $|x' - x''|_X$, al variare di x' e x'' in X, il *diametro perimetrico* del campo X e denotato con $d_\pi(X)$. Ovviamente il diametro ordinario di X non supera il perimetrico, ed è pertanto limitato un campo connesso X che abbia finito quest'ultimo (¹).

Sia $f(x)$ una funzione reale del punto x definita in un campo X, dirò che essa è di classe r, in X, se vi è dotata delle derivate parziali (rispetto alle coordinate $x_1, x_2, \dots, x_n$ di x) fino a quelle incluse d'ordine r. Posto

$$n_0 = 0, \quad n_1 = \binom{n+1}{1} - 1, \quad n_2 = \binom{n+2}{2} - 1, \dots, \quad n_r = \binom{n+r}{r} - 1,$$

(¹) Notiamo che se x, x', x'' sono punti di X, risulta

$$|x' - x''|_X \leq |x - x'|_X + |x - x''|_X.$$

porremo anche $f^{(0)} \equiv f$, e indicheremo con

$$f^{(i)}(x) \qquad (i = 1, 2, \dots, n_r),$$

tutte le derivate parziali della $f(x)$ fino a quelle incluse d'ordine r, e quelle del primo, del secondo, .., , dell' r–mo, rispettivamente, con

$$\begin{array}{l} f^{(1)},\ f^{(1)}, \dots,\ f^{(n)}, \\ f^{(n_1+1)},\ f^{(n_1+2)}, \dots,\ f^{(n_2)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ f^{(n_{r-1}+1)},\ f^{(n_{r-1}+2)}, \dots,\ f^{(n_r)}. \end{array}$$

Sussistono i teoremi seguenti.

I. *Se per una funzione reale* f(x), *di classe* 1 *nel campo* X, *lungo una poligonale* $\pi(x', x'')$ *contenuta in* X *e terminata ai punti* x′ *e* x″, *si ha*

$$|f^{(i)}(x)| \leqq L_\pi \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

risulta

$$|f(x') - f(x'')| \leqq L_\pi \cdot |\pi(x', x'')|,$$

ove $|\pi(x', x'')|$ *indica il perimetro di* $\pi(x', x'')$.

Ciò è conseguenza immediata del teorema di Lagrange per le funzioni derivabili di una variabile, quando la poligonale π è costituita da un sol lato; nell'altro caso, detti $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(\nu-1)}$ i vertici che, successivamente, s'incontrano percorrendola da x' a x'', posto $x^{(0)} = x'$, $x^{(\nu)} = x''$, risulta

$$|f(x') - f(x'')| = \left| \sum_{k=1}^{\nu} (f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})\right| \leqq \sum_{k=1}^{\nu} \left| f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)}) \right| \leqq$$

$$\leqq L_\pi \sum_{k=1}^{\nu} |x^{(k)} - x^{(k-1)}| = L_\pi \cdot |\pi(x', x'')|$$

Se avessimo considerato *tutte* le poligonali contenute in X che ne congiungono due punti fissi x' e x'', l'estremo inferiore dell'insieme numerico descritto dai perimetri di quelle poligonali (che è anche l'estremo inferiore dell'insieme delle lunghezze delle curve continue e rettificabili contenute in X e a quei punti terminate) avrebbe fornito un'altra distanza perimetrica, su X, fra i punti x' e x''. Denotatala con $|x' - x''|_X^*$, subito si dimostra che

$$|x' - x''|_X^* \leqq |x' - x''|_X \leqq |x' - x''|_X^* \sqrt{n},$$

e che, detti $d_\pi^*(X)$ il diametro perimetrico di X fornito dall'estremo superiore dell'insieme delle distanze $|x' - x''|_X^*$, $d(X)$ il diametro ordinario di X,

$$d(X) \leqq d_\pi^*(X) \leqq d_\pi(X) \leqq d_\pi^*(X)\sqrt{n}.$$

Se x. x', x'' sono punti di X, si ha anche

$$|x' - x''|_X^* \leqq |x - x'|_X^* + |x - x''|_X^*.$$

II. *Se* X *è un campo connesso di diametro perimetrico finito, ogni funzione* f(x) *di classe* 1 *in* X, *è ivi (continua e) limitata se vi sono limitate le sue derivate prime.*

Sia L un numero non superato in X dal modulo di ciascuna delle $f^{(i)}(i = 1, 2, \dots, n)$, fissato comunque un punto x^0 di X, per ogni altro punto x di X risulta, in base al teorema precedente,

$$|f(x)| \leqq |f(x^0)| + L d_\pi(X).$$

III. *Un aggregato* [f(x)] *di funzioni di classe* 1 *nel campo connesso* X, *di diametro perimetrico finito, è ivi di funzioni equilimitate, se lo sono ciascuno degli aggregati* $[f^{(i)}(x)]$ (i = 1, 2, ..., n) *delle derivate prime ed è limitato l'insieme* $[f(x^0)]$ *dei valori che le funzioni dell'aggregato assumono in un punto* x^0 *arbitrariamente fissato di* X.

Dirò che un campo connesso X è dotato di *modulo perimetrico* se la distanza perimetrica $|x' - x''|_X$ fra due suoi punti è infinitesima con la distanza $|x' - x''|$, se, cioè, esiste una funzione positiva $\delta_X(\varepsilon)$, che chiamerò un *modulo perimetrico* di X, tale che, comunque si prendano in X due punti x' e x'' ad una distanza minore di $\delta_X(\varepsilon)$, si possa costruire una poligonale coordinata contenuta in X e a quei punti terminata, il cui perimetro non superi ε [2]. Ad esempio, considerate, nel piano, due circonferenze C e C' essendo C' di raggio minore di C, non esterna e tangente alla C, il campo del piano luogo dei punti interni a C ed esterni a C', *non* è dotato di modulo perimetrico. Sussistono i teoremi:

IV. *Se* X *è un campo connesso dotato di modulo perimetrico* $\delta_X(\varepsilon)$, *una funzione* f(x), *di classe* 1 *in* X, *è ivi uniformemente continua se le sue derivate prime vi sono limitate, e detto* L *un numero non superato in* X *dai moduli di queste derivate, un modulo di continuità della* f(x) *è* $\delta_X\left(\frac{\varepsilon}{L}\right)$.

Si ha, infatti (teor. I), comunque si assumano in X due punti x' e x'', con $|x' - x''| < \delta_X(\varepsilon/L)$, detta $\pi(x' - x'')$ una poligonale coordinata contenuta in X e a quei punti terminata, di perimetro non superiore a ε/L,

$$|f(x') - f(x'')| \leqq L \cdot |\pi(x', x'')| \leqq \varepsilon.$$

V. *Un aggregato* [f(x)] *di funzioni di classe* 1, *nel campo connesso* X, *dotato di modulo perimetrico, è di funzioni ivi equicon-*

[2] Una tale proprietà per un campo trovasi già menzionata al n. 122 (teor. III) delle mie *Lezioni di Analisi infinitesimale*, [« Circolo matematico di Catania », Catania (1923)].

tinue [3] *se gli aggregati* $[f^{(i)}(x)]$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ *delle derivate prime sono di funzioni equilimitate in* X.

Dato un arbitrario insieme X di punti di $S_{(n)}$, dirò che una successione di punti di X è una *sua base,* se l'involucro dell'insieme B, costituito dai punti della successione, cioè l'insieme somma di B e del suo derivato, contiene X. Sussiste il seguente ben noto teorema [4].

VI. *Se una successione* $\{f_k(x)\}$ *di funzioni equicontinue in un insieme* X *limitato, di base* B, *converge in ogni punto di questa, essa converge uniformemente in* X, *verso una funzione che ha per modulo di continuità ognuno che sia comune a tutte le* $f_k(x)$,

Ne è corollario il seguente.

VII. *Se una successione* $\{f_k(x)\}$ *di funzioni di classe* r *nel campo limitato* X, *ivi equicontinue ed equilimitate con le loro derivate parziali fino a quelle incluse d'ordine* r, *converge in ogni punto di una base* B *di* X, *la successione stessa e quelle delle derivate parziali dei primi* r *ordini convergono uniformemente in* X.

In base al teor. prec. la successione $\{f_k(x)\}$ converge, uniformemente in X, verso una ben determinata funzione $f(x)$. Esistono d'altra parte [5], una successione $\{\nu_k\}$ di indici, crescente, e una funzione $g(x)$, in X uniformemente continua con tutte le sue derivate parziali dei primi r ordini, per le quali si ha, uniformemente in X,

$$\lim_{k \to \infty} | f_{\nu_k}{}^{(i)}(x) - g^{(i)}(x) | = 0, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n_r),$$

ed essendo, in X, $g(x) \equiv f(x)$, risulta $g^{(i)}(x) \equiv f^{(i)}(x) (i \leq n_r)$. Dimostriamo che si ha, uniformemente in X,

$$\lim_{k \to \infty} | f_k{}^{(i)}(x) - f^{(i)}(x) | = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n_r). \tag{1}$$

Data la equicontinuità, in X, delle $| f_k{}^{(i)}(x), - f^{(i)}(x) |$, basta dimostrare la (1) in ogni punto x^0 di X. Ora ciò segue dal fatto che non possono esistere in numero positivo ε, un indice j di derivazione e una successione $\{\mu_k\}$ di indici, crescente, tali da aversi

$$| f_{\mu_k}{}^{(j)}(x^0) - f^{(j)}(x^0) | \geqq \varepsilon,$$

perchè alla successione $\{\mu_k\}$ ne è subordinata un'altra $\{\mu_k'\}$ per la quale risulta, comunque si prendano il punto x in X e l'indice i, $\lim | f^{(i)}_{\mu'_k}(x) - f^{(i)}(x) |$ (per $k \to \infty$) $= 0$.

(3) Dirò, brevemente, *equicontinue*, ma sarebbe più corretto dire *equiuniformemente continue.*

(4) Cfr., per es., il n. 57 delle mie *Lezioni di Analisi funzionale*, [edite dalla Società editrice " Studium Urbis „ Roma » (1947), Città universitaria].

(5) Cfr., per es., M. PICONE, loc. cit. (4), n. 61.

2. I teoremi del Pucci per le funzioni di più variabili.

VIII. *Si abbia una successione* $\{f_k(x)\}$ *di funzioni reali, di classe 1 nel campo* X *di* $S_{(n)}$ *e sia* q *un numero naturale non superiore a* n. *Se ciascuna delle successioni*

$$\{f_k^{(i)}(x)\} \qquad (i = 1, 2, .., q)$$

diverge uniformemente in un intervallo T *di* X *e (quando fosse* $q < n$*) ciascuna delle*

$$\{f_k^{(i)}(x)\} \qquad (i = q+1, q+2, ..., n),$$

è limitata in T, *esiste una successione* $\{f_{\nu_k}\}$ *subordinata alla* $\{f_k\}$ *che diverge uniformemente in un intervallo* T' *contenuto in* T.

Fissato, arbitrariamente, un punto x^0, *interno* a *T*, esiste una successione $\{\nu_k\}$ di indici, crescente, per la quale si ha

(2) $$f_{\nu_k}(x^{\nu}) \geqq 0,$$

oppure

(3) $$f_{\nu_k}(x^0) \leqq 0.$$

Per un qualsivoglia punto $(x_1^0 + \xi_1, x_2^0 + \xi_2, ..., x_n^0 + \xi_n)$ di T' risulta

$$f_{\nu_k}(x_1^0 + \xi_1, x_2^0 + \xi_2, ..., x_n^0 + \xi_n) = f_{\nu_k}(x^0) +$$
$$f_{\nu_k}^{(1)}(x_1^0 + \theta_1\xi_1, x_1^0 + \xi_2, ..., x_n^0 + \xi_n) + f_{\nu_k}^{(2)}(x_1^0, x_2^0 + \theta_2\xi_2, ..., x_n^0 + \xi_n) +$$
$$... + f_{\nu_k}^{(n)}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0 + \theta_n\xi_n),$$

ove $\theta_1, \theta_1, ..., \theta_n$ sono numeri positivi minori d'uno. Se indichiamo con 2σ la distanza di x^0 dalla frontiera di *T*, con T' l'intervallo di *T* luogo dei punti $(x_1^0 + \xi_1, x_2^0 + \xi_2, ..., x_n^0 + \xi_n)$ per cui

$$|\xi_i| \geqq \sigma \qquad (i = 1, 2, ..., q),$$

con *L* un numero non superato in *T* dai moduli delle derivate $f_k^{(i)}$, per $i = q+1, ..., n$, con δ la massima dimensione di *T*, ne segue, in T', ove si dia alla ξ_i, per $i = 1, 2, ..., q$, nel caso (2) il segno che, al diverger di *k*, definitivamente acquistano le $f_k^{(i)}$ e nel caso (3) il segno contrario, supposto che, per $k > k_M$, risulti, in *T*, $|f_{\nu_k}^{(i)}(x)| > M (i = 1, 2, ..., q)$,

$$|f_{\nu_k}(x_1^0 + \xi_1, x_2^0 + \xi_2, ..., x_n^0 + \xi_n)| > qM\sigma - (n-q)L\delta.$$

Si ha pertanto, per l'arbitrarietà di *M* e la continuità in *T* delle f_k, l'uniforme divergenza in T' della successione $\{f_{\nu_k}(x)\}$.

IX. *La successione* $\{f_k(x)\}$ *sia di funzioni di classe* 1, *nel campo connesso* X, *di diametro perimetrico finito. Se le derivate prime* $f_k^{(i)}(x) (i = 1, 2, ..., n)$ *sono equilimitate in* X *e non lo sono le* $f_k(x)$, *esiste una successione subordinata alla* $\{f_k(x)\}$ *uniformemente divergente in tutto* X.

In base al teor. III, fissato, comunque, un punto x^0 di X, esiste una successione $\{\nu_k\}$ di indici, crescente, tale da aversi

$$\lim_{k\to\infty} f_{\nu_k}(x^0) = +\infty, \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{k\to\infty} f_{\nu_k}(x^0) = -\infty,$$

ma (teor. I) detto L un numero non superato in X dal modulo delle $f_k^{(i)}(x)$ risulta, in X,

$$f_{\nu_k}(x^0) - Ld_\pi(X) \leqq f_{\nu_k}(x) \leqq f_{\nu_k}(x_0) + Ld_\pi(X),$$

donde l'uniforme divergenza, in X, della successione $\{f_{\nu_k}(x)\}$.

X. *La successione* $\{f_k(x)\}$ *sia di funzioni di classe* $\mathrm{r}+1$ *nel campo connesso* X, *di diametro perimetrico finito, equilimitate in ciascun punto di una base* B *di* X [6]. *Se le derivate d'ordine* $\mathrm{r}+1$ *delle* $\mathrm{f}_k(\mathrm{x})$ *sono tutte equilimitate in* X, *allora lo sono ivi anche tutte le funzioni* $\mathrm{f}_{\mathrm{x}}^{(\mathrm{i})}(\mathrm{x})$ $(\mathrm{i}=0,\ 1,\ 2,\dots,\ n^{(\mathrm{r})})$.

Se le derivate $f_k^{(n_{r-1}+1)}$, d'ordine r, non fossero equilimitate in X, esisterebbe, in base al teor. IX, una successione $\{\nu_k'\}$ di indici, crescente, per la quale la successione $\{f_{\nu_k'}^{(n_{r-1}+1)}\}$ vi divergerebbe uniformemente. Se le derivate $f_{\nu_k'}^{(n_{r-1}+2)}$ non fossero equilimitate in X, esisterebbe una successione $\{\nu_k''\}$ di indici, subordinata alla $\{\nu_k'\}$ per la quale la successione $\{f_{\nu_k''}^{(n_{r-1}+2)}\}$ ivi divergerebbe eniformemente, ... Così procedendo, si dimostra che se le derivate $f_k^{(i)}(i=n_{r-1}+1,\ n_{r-1}+2,\dots,\ n_r)$ d'ordine r, non fossero tutte equilimitate in X, si potrebbe costruire una successione $\{\nu_k\}$ di indici, crescente, tale che alcune delle successioni $\{f_{\nu_k}^{(i)}\}$ $(i=n_{r-1}+1,\ n_{r-1}+2,\dots,\ n_r)$ sarebbero uniformemente divergenti in X e le rimanenti limitate. Sia T un intervallo di X e $\{f_{\nu_k}^{(n_{r-2}+1)}\}$ una successione, di derivate d'ordine $r-1$, per la quale, fra le n sue successioni derivate

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_i} f_{\nu_k}^{(n_{r-2}+1)}\right\} \qquad (i=1,\ 2,\dots,\ n),$$

se ne presenti una, almeno, che sia uniformemente divergente in X e quindi in T. In base al teor. VIII esiste un intervallo T' contenuta in T e una successione di indici $\{\nu_k'\}$ subordinata alla $\{\nu_k\}$ per la quale la successione $\{f_{\nu_k'}^{(n_{r-2}+1)}\}$ risulta uniformemente divergente in T'. Consideriamo ora la successione $\{f_{\nu_k'}^{(n_{r-2}+2)}\}$. Due casi possono presentarsi: o fra le n sue successioni derivate ve ne sono uniformemente divergenti in T', ed allora si può costruire una successione $\{\nu_k''\}$ subordinata alla $\{\nu_k'\}$ e un intervallo T'' contenuto in T', per cui la successione $\{f_{\nu_k''}^{(n_{r-2}+2)}\}$ diverge uni-

[6] Ciò non vuol dire, ovviamente, che siano equilimitate in B.

formemente in T'', oppure tutte le sue successioni derivate sono limitate in T', ed allora avverrà (teor. IX) che se la successione stessa non è limitata in T' ve n'è una $\{f_{\nu_k'}^{(n_{r-2}+2)}\}$ ad essa subordinata uniformente divergente in T', ... Così procedendo si perviene alla costruzione di un intervallo T_1 contenuto in T e di una successione $\{\nu_{1h}\}$ di indici, crescente, tali che alcune delle successioni $\{f_{\nu_h}^{(i)}\}$ $(i = n_{r-2} + 1, n_{r-2} + 2, \dots, n_{r-1})$ sono uniformemente divergenti in T e le rimanenti limitate, essendovi fra le divergenti quella per $i = n_{r-2} + 1$. Ripetendo il ragionamento, successivamente, per le derivate degli ordini $r - 2$, $r - 3, \dots$, si perviene alla costruzione di un intervallo T_r contenuto in T e di una successione $\{\nu_{rh}\}$ di indici, crescente, per cui la successione $\{f_{\nu_{rk}}\}$ risulta uniformemente divergente in T_r, il che è contro l'ipotesi.

XI. *La successione* $\{\mathrm{f_k(x)}\}$ *i cui termini sono funzioni di classe* $\mathrm{r} + 1$ *nel campo connesso* X, *dotato di modulo perimetrico e di diametro perimetrico finito, converga in ogni punto di una base* B *di* X. *Se le derivate d'ordine* $\mathrm{r} + 1$ *delle* $\mathrm{f_k(x)}$ *sono tutte equilimitate in* X, *allora le successioni* $\{\mathrm{f_k^{(i)}(x)}\}$ $(\mathrm{i} = 0, 1, 2, \dots, \mathrm{n_r})$ *sono tutte uniformemente convergenti in* X.

In virtù della convergenza della $\{f_k(x)\}$ in ogni punto di B, si ha la sua limitatezza in ogni tale punto. Son dunque verificate le ipotesi del teor. X e pertanto risultano equilimitate in X tutte le funzioni $f_k^{(i)}(x)$ $(i = 0, 1, 2, \dots, n_{r+1})$. Essendo X dotato di modulo perimetrico, ne segue, per il teor. V, la equicontinuità in X delle funzioni $f_k^{(i)}(x)$ $(i = 0, 1, 2, \dots, n_r)$, donde la tesi, in forza del teorema VII.

3. **Indicazione di talune estensioni.** – È facile estendere i teoremi enunciati al caso che le funzioni considerate siano vettori ad un qualsivoglia numero q di componenti e se ne deduce, in particolare, il seguente teorema da avvicinarsi ad uno ben noto del VITALI.

XII. *La successione* $\{\mathrm{f_k(z)}\}$, *i cui termini sono funzioni dell'unica variabile complessa* z, *olomorfe in un campo connesso* Z *del piano complesso, dotato di modulo perimetrico e di diametro perimetrico finito, sia limitata in ciascun punto di una base* B *di* Z *e convergente in un insieme di punti di* Z *avente, almeno, un punto d'accumulazione situato in* Z. *Se le derivate di un certo ordine* $1 + \mathrm{r}$ *delle* $\mathrm{f_k(z)}$ *sono equilimitate nel campo* Z, *la successione* $\{\mathrm{f_k(z)}\}$ *e le sue derivate fino a quella inclusa d'ordine* r, *convergono uniformemente in* Z (7).

(7) Convergono, ovviamente, in ogni punto di Z, anche le successioni derivate d'ordine maggiore di r, ma queste, in generale, *uniformemente*. soltanto in ogni insieme chiuso contenuto in Z.

Ad un teorema analogo per le funzioni di più variabili complesse si può facilmente pervenire, valendosi, anzichè di considerazioni intese ad estendere i teoremi dei nn. precedenti alle funzioni vettoriali, delle seguenti.

Sia $f(x)$ un vettore a q componenti, funzione del punto x dello spazio $S_{(n)}$, di classe r in un campo connesso X, con derivate r-me assolutamente continue rispetto a ciascuna delle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ su un qualsivoglia segmento finito, contenuto in X e parallelo ad uno degli assi coordinati, cioè, come diremo, su ogni *segmento coordinato*. Posto

$$f_{s_1 s_2 \dots s_n} = \frac{\partial^{s_1+s_2+\dots+s_n} f}{\partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2} \dots \partial x_n^{s_n}},$$

è noto [8] che, fissato un punto x^0 di X, detta $\pi(x^0, x)$ una qualunque poligonale coordinata, contenuta in X e terminata ai punti x^0 e x, si ha

$$(4) \quad f_{s_1 s_2 \dots s_n}(x) = \sum_{\substack{l_1 l_2 \dots l_n \\ l_1+l_2+\dots+l_n \leq r-p}}^{0,r-p} f_{s_1+l_1, s_2+l_2, \dots, s_n+l_n}(x^0) \prod_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x_i^0)^{l_i}}{l_i!} -$$

$$- (\pi) \int_{x^0}^{x} \sum_{\substack{l_1 l_2 \dots l_n \\ l_1+l_2+\dots+l_n = r-p+s}} f_{s_1+l_1, s_2+l_2, \dots, s_n+l_n}(\xi) d\xi \prod_{i+1}^{n} \frac{(x_i - \xi_i)^{l_i}}{l_i!},$$

per

$$p = 0, 1, \dots, r; \quad s_1 + s_2 + \dots + s_n = p; \quad s_1, s_2, \dots, s_n = 0, 1, \dots, p,$$

ove $\xi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ indica il punto variabile sulla $\pi(x^0, x)$, d_ξ il differenziale totale di una funzione di ξ, rispetto alle variabili ξ_i,

$$(5) \qquad (\pi) \int_{x^0}^{x}$$

l'integrale sulla poligonale $\pi(x_0, x)$, nel verso da x^0 a x. Ne segue che se lungo ogni lato della $\pi(x^0, x)$ le derivate d'ordine $1 + r$ sono, là dove esistono, in modulo superiormente limitate dal numero L, risulta

$$(6) \quad \left| f_{s_1 s_2 \dots s_n}(x) - \sum_{\substack{l_1 l_2 \dots l_n \\ l_1+l_2+\dots+l_n \leq r-p}}^{0,r-p} f_{s_1+l_1, s_2+l_2, \dots, s_n+l_n}(x^0) \prod_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x_i)^{l_i}}{l_i!} \right| \leq$$

$$\leq L \frac{(\sqrt{n}\, |x - x^0|)^{r-p}}{(r-p)!} |\pi(x^0, x)|,$$

[8] Cfr. M. Picone, *Sul criterio di integrabilità delle forme differenziali di qualsivoglia grado*, « Bollettino dell'Unione Mat. Italiana », 1937.

per

$$p = 0, 1, ..., r; \quad s_1 + s_2 + ... + s_n = p; \quad s_1, s_2, ..., s_n = 0, 1, ..., p.$$

Se anche le derivate d'ordine $1 + r$ sono continue in X, all'integrale (5) si può sostituire, nella (4), quello lungo una qualsivoglia curva C continua e rettificabile, terminata ai punti x^0 e x, e al secondo membro della (6)

$$L \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n} \mid x - x^0 \mid)^{r-p}}{(r-p)!} \cdot \text{lung } C, \tag{7}$$

e se fra tali curve vi è il segmento rettilineo,

$$L \frac{(\sqrt{n} \mid x - x^0 \mid)^{r-p+1}}{(r-p+1)!} \tag{8}$$

Si hanno dumque i teoremi:

XIII. *Se i vettori a* q *componenti dell'aggregato* [f(x)] *sono funzioni del punto* x *di classe* r *nel campo connesso* X *avente diametro perimetrico finito* $d_\pi(X)$, *con derivate d'ordine* r *ivi equiuniformemente lipschitziane sui segmenti coordinati, mentre gl'insiemi numerici*

$$[f^{(i)}(x^0)] \quad (i = 0, 1, 2, ..., n_r),$$

essendo x^0 *un fissato punto di* X, *sono limitati, le funzioni* $f^{(i)}(x)$. *per* $i \leq n_r$ *risultano equilimitate in* X, *e, detto* $L_p{}^0$ *un numero non superato in* x^0 *dal modulo delle derivate d'ordine* $p(p = 0, 1, ..., r)$, L_{1+r} *uno non superato, nei punti di* X *ove esistono, dalle derivate d'ordine* $1 + r$, *un numero non superato in* X *dal modulo delle derivate d'ordine* p *è dato da*

$$L_p = \sum_{h=0}^{r-p} L^0{}_{p+h} \frac{(\sqrt{n} d(X))^h}{h!} + L_{1+r} \frac{(\sqrt{n} d(X))^{r-p}}{(r-p)!} d_\pi(X),$$

avendo designato con d(X) *il diametro ordinario di* X. *Se, di più, il campo* X *è dotato di modulo perimetrico* $\delta_X(\varepsilon)$, *le derivate d'ordine* $p(p \leq r)$ *riescono anche equicontinue in* X. *con modulo di continuità*

$$\delta_X\left(\frac{\varepsilon}{L_{p+1}}\right).$$

XIV. *I vettori della successione* $\{f_k(x)\}$ *verifichino, nel campo connesso* X *dotato di modulo perimetrico e di diametro perimetrico finito, le ipotesi del teor. prec. Se le successioni delle loro derivate* $(r + 1)$*-me convergono su ogni segmento coordinato, quasi ovunque, allora, dalla convergenza delle successioni* $\{f_k^{(i)}(x)\}$, *per* $i \leq n_r$, *in un punto* x^0 *di* X, *segue la convergenza uniforme di queste in tutto* X.

Sia ora $f(z)$ una funzione del punto z, di coordinate complesse

$z_1, z_2, \ldots, z_n$, olomorfa nel campo connesso Z dello spazio complesso $S_{(2n)}$ a $2n$ dimensioni. Intendendo per poligonale coordinata $\pi(z^0, z)$, terminata ai punti z_0 e z, ordinatamente di vertici $z^0, z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(\nu)}$, $z^{(\nu+1)} \equiv z$, ogni poligonale di $S_{(2n)}$ tale che fra una coppia qualsivoglia di vertici consecutivi $z^{(h)}$ e $z^{(h+1)}$ sussistano le eguaglianze

$$z_k^{(h)} = z_k^{(h+1)}.$$

per tutti i valori, uno solo eccettuato, dell'indice k da 1 a n, si vede che sussistono ancora le (4) e (6), per qualsivoglia indice r, positivo o nullo, ove si sostituiscano i punti x^0, x, ξ, rispettivamente coi punti z^0, z, ζ di coordinate complesse, potendosi altresì sostituire il secondo membro della (6) con le funzioni (7) e (8), nella cui espressioni venga operata la medesima sostituzione. Ne segue il teorema:

XV. *La successione* $\{f_k(z)\}$ *sia costituita di funzioni del punto* $z(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *olomorfe nel campo connesso* Z *dello spazio complesso* $S_{(2n)}$, *dotato di modulo perimetrico e di diametro perimetrico finito. Se esiste un punto* z^0 *di* Z, *in cui le successioni* $\{f_k^{(i)}(z^0)\}$ *convergono per qualsivoglia* i *e le derivate parziali di un certo ordine* $1 + r$ *sono equilimitate in* Z, *le successioni* $\{f_k^{(i)}(z)\}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n_r)$ *convergono uniformemente in* Z.