Bollettino
Unione Matematica Italiana

Beniamino Segre

Alcune questioni diofantee

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.1, p. 33–43.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_1_33_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1950.

Alcune questioni diofantee.

Nota di Beniamino Segre (a Bologna).

Sunto. - *Il presente lavoro mostra in varie guise come la geometria algebrica possa esser utilizzata nello studio di questioni aritmetiche. Nel § I vengono ottenuti, con mezzi geometrici semplicissimi, alcuni risultati di Hurwitz sulle cubiche che contengono soltanto quattro punti razionali. Nel § II è dato un nuovo esempio di una cubica siffatta, e sono determinati tutti i punti razionali di una certa superficie biquadratica. Di ciò si usufruisce poi nel § III, per risolvere e lumeggiare geometricamente un problema diofanteo di A. Moessner.*

I.

1. Se una cubica e littica Γ, definita nel campo razionale, contiene quattro - e non più di quattro - punti razionali, allora uno - e soltanto uno - di questi risulta un flesso di Γ; a priori si possono quindi presentare due alternative, secondochè gli altri tre punti razionali di Γ sono o non sono fra loro allineati. Nel primo caso, ciascuno di tali tre punti ha come tangenziale il flesso razionale di Γ; nel secondo caso, certi due di quei tre punti hanno per tangenziale il terzo, questo avendo per tangenziale il flesso razionale di Γ, il quale risulta allineato coi primi due punti.

Questi risultati, già ottenuti da HURWITZ coll'uso delle funzioni ellittiche [1], possono anche venire stabiliti mediante le seguenti semplicissime considerazioni geometriche, poggianti sul così detto metodo delle corde e delle tangenti. Tale metodo verte sull'osservazione, già usata dal LIBRI nell'analisi diofantea di 3° grado, secondo cui da due punti razionali P, Q (distinti o coincidenti) di Γ si può dedurre un terzo punto razionale di Γ, e precisamente l'intersezione R — residua a P, Q — di Γ colla retta PQ (definendosi questa retta come la tangente in P a Γ, qualora P e Q coincidano); il punto R è distinto da P, Q, tranne nel caso in cui di questi due punti uno sia il tangenziale dell'altro (il che — quando P e Q coincidono — equivale a supporre che $P \equiv Q$ sia un flesso di Γ).

Ciò premesso, supponiamo che Γ contenga esattamente quattro punti razionali, diciamoli A, B, C, D, e mostriamo anzitutto che — fra questi — uno al più può essere un flesso di Γ. Ed invero, se due di essi fossero flessi, la loro congiungente incontrerebbe Γ in un terzo flesso razionale, sicchè tre dei quattro punti suddetti, per es. A, B, C, dovrebbero essere flessi di Γ, fra loro allineati. Ma allora le rette AD, BD, CD non potrebbero toccar Γ in A, B, C, ed al più una di esse potrebbe toccar Γ in D, sicchè su almeno due di quelle rette si troverebbe un punto razionale di Γ distinto da A, B, C, D, contro al supposto. Dunque almeno tre fra i punti A, B, C, D non sono flessi di Γ, e supponiamo che ciò sia di A, B, C; distinguiamo poi due casi, secondochè A, B, C sono o non sono allineati.

Nel primo caso i tangenziali dei punti A, B, C non possono cadere in nessuno di questi tre punti, ond'essi coincidono tutti con D, che è quindi un flesso di Γ.

Nel secondo caso i punti A, B, C sono vertici di un triangolo, i cui lati debbono tutti — o tutti meno uno — risultare tangenti a Γ. Se ciascuno di quei lati toccasse Γ, il punto D non potrebbe stare su nessuno di essi, e le tangenti a Γ nei punti A, B, C coinciderebbero (in ordine opportuno) con detti lati; ma allora si otterrebbe una contraddizione, esaminando — come dianzi — il comportamento di Γ colle rette AD, BD, CD. Vi è dunque uno ed un solo lato del triangolo ABC, sia p. es. AB, che non tocca Γ e quindi

[1] Ved. A. HURWITZ, *Ueber ternäre diophantische Gleichungen dritten Grades*, Viert. Nat. Ges. in Zürich, 62 (1917), pp. 207-229, od anche *Mathematische Werke*, Bd. 2 (Basel, Birkhäuser, 1933), pp. 446-468, § 8.

incontra Γ ulteriormente nel punto D. Allora i tangenziali di A e di B, non potendo cadere in nessun dei punti A, B, D, debbono entrambi coincidere con C; il tangenziale di C non può essere che D; infine D — non potendo avere nessuno dei punti A, B, C come tangenziale — è il tangenziale di se medesimo, ossia è un flesso di Γ.

II.

2. Dal n. 1 discende agevolmente che, con opportuna scelta delle coordinate proiettive omogenee x, y, z, l'equazione di una cubica che presenti la seconda delle suddette alternative può scriversi nella forma

$$x(x+z)(y+z)+ay^2z=0 \tag{1}$$

(che già trovasi in HURWITZ, l. c.), con a razionale. È chiaro inversamente che, comunque si scelga il numero razionale a, la cubica (1) contiene i quattro punti razionali

$$A(0,\ 0,\ 1), \qquad B(1,\ 0,\ -1), \qquad C(0,\ 1,\ 0), \qquad D(1,\ 0,\ 0), \tag{2}$$

formanti su essa una configurazione del tipo dianzi indicato nel secondo caso. Sono però pochissimi i valori di a per i quali sia stato provato che *la* (1) *non contiene altri punti razionali all'infuori dei punti* (2) (²). Nel presente paragrafo proveremo che:

Un nuovo valore di a *per cui la* (1) *gode della proprietà indicata è* a $=-1/12$.

A tal uopo incominciamo coll'osservare che, posto

$$x=(w-uv)/(2v), \qquad y=v-u\,, \qquad z=u,$$

da cui si ricava

$$u=z, \qquad v=y+z, \qquad w=(2x+z)(y+z),$$

la (1) diventa

$$4auv(u-v)^2-u^2v^2+w^2=0.$$

Per $a=-1/12$ quest'equazione può scriversi nella forma

$$uv(u^2+uv+v^2)=3w^2, \tag{3}$$

sicchè il fatto asserito equivale a mostrare che

L'equazione diofantea (3) *non ammette altre soluzioni in nu-*

(²) Uno di tali valori è $a=-1/8$, come discende da B. LEVI, *Saggio per una teoria aritmetica delle forme cubiche ternarie* (Nota II), « Atti Acc. Sc. Torino », **43** (1907-08) pp. 99-120, n. 8. Un altro valore, dato da HURWITZ — senza dimostrazione — in loc. cit. in (¹), è $a=-1/4$.

meri u, v, w *razionali, all'infuori di quelle che si ottengono assumendo* u $=0$, *o* v $=0$, *oppure* u $=$ v [3].

Siccome la forma quadratica u^2+uv+v^2 è definita positiva, e poichè se (u, v, w) è una soluzione della (3) tale è pure (ku, kv, k^2w), dove k denota un numero razionale arbitrario, così basterà stabilire che la (3) non ammette nessuna soluzione in numeri u, v, w interi, soddisfacenti alle

$$(4)\qquad u>0,\qquad v>0,\qquad (u,\ v)=1,\qquad uv>1.$$

Supposto per assurdo che soluzioni siffatte esistano, consideriamo una (u, v, w) di tali soluzioni per la quale il prodotto uv raggiunga il valore minimo. Proveremo allora il teorema enunciato mostrando (nei nn. 3-6) che l'ipotesi ammessa porta ad una contraddizione; all'uopo distingueremo due casi, secondochè nessuno od uno dei suddetti interi u, v è divisibile per 3.

3. Nel primo caso, dalle (3), (4) si deducono le

$$(5)\qquad u=x^2,\qquad v=y^2,\qquad w=xyz,\qquad u^2+uv^2+v^2=3z^2,$$

dove x, y, z denotano interi positivi. Posto allora

$$p_1=u-z,\qquad q_1=v-z,$$

è subito visto che $p_1q_1\neq 0$ e che l'ultima delle (5) equivale all'una ed all'altra delle equazioni

$$2p_1^2+2p_1q_1-q_1^2=3(p_1+q_1)u,\qquad 2q_1^2+2p_1q_1-p_1^2=3(p_1+q_1)v.$$

Poichè per ipotesi $(u, v)=1$, da qui seguono le

$$(6)\qquad 2p(p+q)-q^2=\rho u,\qquad 2q(p+q)-p^2=\rho v,$$

ove si è assunto

$$p=p_1/d,\qquad q=q_1/d,\qquad \rho=3(p_1+q_1)/d,\qquad d=(p_1,\ q_1),$$

talchè

$$(7)\qquad (p,\ q)=1.$$

Le (6) possono scriversi nella forma equivalente

$$(8)\qquad 3p^2-(p-q)^2=\rho u,\qquad 3q^2-(p-q)^2=\rho v,$$

[3]) Interpretate le u, v, w quali coordinate cartesiane nello spazio, la (3) rappresenta ivi una *superficie del* 4° *ordine*, di cui così si hanno tutti i *punti razionali*; questi si distribuiscono precisamente lungo quattro rette (di cui due proprie e due improprie) e lungo due coniche. Per uno studio generale di problemi di tale tipo, cfr. B. SEGRE, *On arithmetical properties of quartic surfaces*, « Proc. London Math. Soc. », (2) 49 (1947), pp. 353-395.

od anche nella

$$3p(p+2q)=\rho(2u+v), \qquad 3q(2p+q)=\rho(u+2v). \tag{9}$$

Tenuto conto della (7), dalle (9) si vede che ρ divide $3(p+2q)$, $3(2p+q)$, e quindi pure $9p$, $9q$ (che rispettivamente da quelle si ottengono combinandole linearmente coi coefficienti $-1, 2$ e $2, -1$), sicchè ρ è un divisore del 9. Ora non può essere $\rho=\pm 9$; altrimenti, in virtù delle (8), $p-q$ dovrebbe essere divisibile per 3, e quindi $3p^2$, $3q^2$ dovrebbero essere divisibili per 9, ciò che è in contraddizione colla (7). Può dunque soltanto essere $\rho=\pm 3$, oppure $\rho=\pm 1$.

Ne discende — come tosto vedremo — che p e q sono entrambi d i s p a r i e quindi, in virtù delle (6), che tali sono pure u e v. Ed invero, se p. es. q fosse pari, in base alle prime equazioni (6), (5) sarebbe $u\equiv 0 \pmod 4$, e la seconda equazione (9) porgerebbe $2v\equiv 0 \pmod 4$, sicchè u e v sarebbero entrambi pari, in contraddizione colla $(u, v)=1$. Pertanto le (5) forniscono $u\equiv 1 \pmod 4$, $v\equiv 1 \pmod 4$, onde prendendo l'una o l'altra equazione (6) modulo 4 si ottiene $\rho\equiv -1 \pmod 4$. Vi sono dunque soltanto due alternative possibili, e cioè $\rho=3$ oppure $\rho=-1$.

4. Se $\rho=3$, le (8), (5) forniscono

$$3(p^2-x^2)=3(q^2-y^2)=(p-q)^2, \tag{10}$$

ed i tre membri delle (10) non possono annullarsi, altrimenti sarebbe $p=q$, $x^2=p^2=q^2=y^2$, e quindi $|x|=|y|$, onde le (2) fornirebbero $u=v$, in contrasto colle (4). Introdotti dunque i numeri

$$2r=p-x, \qquad 2s=q-y \tag{11}$$

(entrambi pari in forza del n. 3), risulta $rs\neq 0$ e le (10) diventano

$$12r(x+r)=12s(y+s)=(p-q)^2; \tag{12}$$

queste mostrano che è $r\neq s$, $x+r\neq s$, non potendo — come s'è detto — essere $|x|=|y|$.

Notiamo ora che $(r, x+r)=1$. Invero, ove così non fosse, x ed r ammetterebbero un divisore comune >1; questo dividerebbe p e $p-q$ in forza delle (11), (12), il che contraddirebbe la (7). La (12) mostra allora che dev'essere

$$r=\pm a^2, \qquad x+r=\pm 3b^2, \qquad p-q=6ab \tag{13}$$

oppure

$$r=\pm 3b^2, \qquad x+r=\pm a^2, \qquad p-q=6ab, \tag{13'}$$

dove vanno scelti simultaneamente i segni superiori o gli inferiori, ed a, b denotano interi non nulli. Sia nell'uno che nell'altro caso, da queste relazioni e dalle (11), (12) segue la

$$3(a^2 \mp s)b^2 + 6asb \mp (a^3 \mp s)s = 0.$$

Il discriminante di quest'equazione quadratica in b vale

$$\pm 3s(a^4 \pm a^2 s + s^2),$$

e dev'essere un quadrato. Ciò mostra che si soddisfa alla (3) assumendo per u e v i valori

$$u' = a^2, \qquad v' = \pm s, \tag{14}$$

i quali sono diversi fra loro in virtù delle (13) o (13') e di quanto osservato alla fine del precedente capoverso.

Con tale scelta risulta palesemente $u' > 0$ e quindi $v' > 0$; in base alle (13) o (13') ne consegue che è $rs > 0$ ossia, in forza delle (11), $(p - x)(q - y) > 0$. Ricordando (n. 3) che $x > 0$, $y > 0$, e notando che — in virtù delle (10) — si ha $x < |p|$, $y < |q|$, da qui discende che

$$pq > 0.$$

Inoltre le (10), (5) forniscono

$$pq < pq + \frac{1}{6}(p - q)^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) < x^2y^2 = uv.$$

Pertanto dalle (14), (13) o (13'), (11) si deduce

$$u'v' = |a^2 s| = \frac{|p \pm x|}{2} \cdot \frac{|q - y|}{2} \leq \frac{x + |p|}{2} \cdot \frac{y + |q|}{2} < |pq| < uv,$$

e quindi $u'v' < uv$. Abbiamo così ottenuta, nelle ipotesi attuali, la contraddizione annunciata alla fine del n. 2.

5. Nella seconda delle due alternative specificate alla fine del n. 3 ($\rho = -1$), le (6), (5) forniscono:

$$x^2 = q^2 - 2pq - 2p^2, \qquad y^2 = p^2 - 2pq - 2q^2. \tag{15}$$

Da qui si deduce $x^2 - y^2 = 3(q^2 - p^2)$, sicchè $x + y$ od $x - y$ risulta divisibile per 3. Introduciamo allora gli i n t e r i a, b, c definiti dalle

$$x \pm y + 3(p + q) = 6a, \qquad x \pm y - 3(p + q) = 6b, \qquad \mp y + q = c, \tag{16}$$

ove dappertutto vanno scelti rispettivamente i segni superiori o gli inferiori. Una facile discussione mostra che, nelle ipotesi attuali, è

$$a \neq 0, \qquad b \neq 0, \qquad a \neq b.$$

Se ora esprimiamo nelle (15) le x, y, p in funzione delle a, b, c, q mediante le (16), giungiamo a due equazioni di 1° grado in q; ed eliminando q fra queste, otteniamo

$$3a(a^2 + ab + b^2) = b(a + 2b + c)^2.$$

Ciò dimostra che si soddisfa alla (3) attribuendo ad u, v i valori a, b (talchè $ab > 0$).

D'altra parte, tenuto conto delle (16), (15), (5), si ha:

$$ab = [(x \pm y)^2 - 9(p + q)^2]/36 < (x \pm y)^2/4 < (x^2 + y^2)/2 < x^2y^2 = uv,$$

e quindi $ab < uv$. Abbiamo così anche ora ottenuta una contraddizione alle ipotesi del n. 2, ciò che completa la dimostrazione dell'impossibilità del primo dei due casi distinti alla fine del n. 2.

6. Riferendoci da ultimo al secondo di tali casi, si abbia ad esempio $u = 3t$, ove t denota un intero non nullo. Con questa posizione la (3) diventa

$$vt(v^2 + 3vt + 9t^2) = w^2;$$

ora v non è divisibile per 3, in forza della $(u, v) = 1$, e quindi i tre fattori in cui è decomposto il primo membro dell'ultima relazione risultano a due a due primi fra loro. Da essa pertanto si trae

$$(17) \qquad v = x^2, \qquad t = y^2, \qquad v^2 + 3vt + 9t^2 = z^2,$$

dove x, y, z denotano tre interi positivi a due a due primi fra loro, ed inoltre $z \neq v$.

Sia p/q la frazione $(z - v)/t$ ridotta ai minimi termini, e cioè si abbia

$$(18) \qquad z = v + tp/q,$$

ove

$$(19) \qquad pq \neq 0, \qquad q > 0, \qquad (p, q) = 1.$$

Dalle (17), (18) si ricava:

$$(20) \qquad q(2p - 3q)x^2 = (3q + p)(3q - p)y^2.$$

Si noti ora che, in forza delle (19), q è primo con $3q + p$ e con $3q - p$, ed $r = (q, 2p - 3q)$ può soltanto valere 1 o 2. Inoltre, un comune divisore delle $2p - 3q$, $3q + p$ è pure divisore comune di $3p$, $9q$ (che da quelle rispettivamente si ottengono combinandole linearmente coi coefficienti 1, 1 e -1, 2), e quindi può soltanto valere ± 1, ± 3, ± 9; parimenti, un divisore comune di $2p - 3q$, $3q - p$ è divisore comune di p, $3q$, onde può soltanto valere ± 1, ± 3. Pertanto dalla (20) si deducono le

$$(21) \qquad q = ra^2, \qquad 2p - 3q = rsb^2, \qquad 9q^2 - p^2 = sc^2.$$

dove a, b, c sono interi non nulli a due a due primi fra loro, ed inoltre

$$r = 1,\ 2, \qquad s = \pm 1,\ \pm 3,\ \pm 9,\ \pm 27.$$

Le (20), (21), (17) forniscono $a^2b^2r^2v = c^2y^2$, sicchè c non può essere divisibile per 3.

Eliminando p e q fra le (21), si ottiene

$$4sc^2 = r^2(3a^2 - sb^2)(9a^2 + sb^2). \tag{22}$$

Non può quindi risultare nè $s = \pm 3$ nè $s = \pm 9$, altrimenti il secondo membro della (22) diverrebbe rispettivamente divisibile per 9, 27, mentre il primo membro non lo sarebbe. Si esclude poi che possa essere $s = 1$ od $s = -27$, poichè in tal caso i due membri della (22), divisi per s, risulterebbero visibilmente incongrui modulo 3.

Esaminiamo infine le due restanti possibilità $s = -1$ ed $s = 27$, per le quali la (22) rispettivamente riducesi alla

$$r^2(-9a^2 + b^2)(3a^2 + b^2) = 4c^2, \tag{23}$$

od alla

$$r^2(a^2 - 9b^2)(a^2 + 3b^2) = 4c^2; \tag{23'}$$

basterà anzi limitarsi a discutere la (23), in quanto la (23') differisce dalla (23) semplicemente per lo scambio di a e b. In forza della (23), b non può essere divisibile per 3. Ne discende che, posto

$$u_1 = 3a + b, \qquad v_1 = -3a + b, \qquad w_1 = 2c/r,$$

si ha $u_1 \neq 0$, $v_1 \neq 0$, $u_1 \neq v_1$, ed inoltre nè u_1 nè v_1 è divisibile per 3. D'altro canto, in virtù della (23), la (3) è soddisfatta assumendo $u = u_1$, $v = v_1$, $w = w_1$; ma ciò risulta in contrasto con quanto abbiamo stabilito nei nn. 3-5, il che dimostra che anche il secondo caso considerato alla fine del n. 2 è impossibile.

III.

7. Applicheremo i risultati del paragrafo precedente per provare che:

Il sistema diofanteo (4)

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = x_3^2 + y_3^2, \qquad x_1^3 + y_1^3 = x_2^3 + y_2^3 = x_3^3 + y_3^3$$

(4) Esso fu proposto da A. Moessner, in questo « Bollettino », (3) 4 (1949), p. 146. Uno studio meno circostanziato di tale sistema trovasi già in B. Segre, *Problèmes arithmétiques en Géométrie algébrique*, « Atti del Colloquio di Geometria algebrica di Liegi », (19-21 dicembre 1949); cfr. pure la *Risposta ad una questione proposta da A. Moessner* di L. Gatteschi e L. A. Rosati, che compare in questo stesso fascicolo del « Bollettino ».

non ammette nel campo razionale altre soluzioni all'infuori di quelle banali che si hanno dando uno stesso valore a tre variabili di indici diversi, ed attribuendo un medesimo valore alle rimanenti tre variabili.

È istruttivo esaminare la cosa geometricamente, interpretando le variabili $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ come coordinate omogenee di punto in un S_5. Ivi il sistema precedente rappresenta una curva Γ, il cui ordine — a norma del teorema di BÉZOUT — vale $2\cdot 2\cdot 3\cdot 3 = 36$; e si tratta di trovare i punti razionali situati su Γ.

È subito visto che Γ è trasformata in sè da un gruppo G_{48} di 48 omografie, rappresentate dalle 48 sostituzioni sulle lettere x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 operanti imprimitivamente sulle tre coppie collo stesso indice.

8. Allo scopo di approfondire la struttura della curva Γ, introduciamo le abbreviazioni

$$p_i = x_i^2 + y_i^2, \qquad q_i = x_i^3 + y_i^3 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$
$$r_{ij} = 2x_i y_i + 2x_j y_j + (x_i + y_i)(x_j + y_j) \qquad (i \neq j,\quad i, j = 1,\ 2,\ 3),$$
$$s = x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3,$$

e rileviamo le identità:

$$2(q_i - q_j) \equiv (2x_i + 2y_i + x_j + y_j)(p_i - p_j) + (x_i + y_i - x_j - y_j)(p_j - r_{ij}),$$
$$s(x_i + y_i - x_j - y_j) \equiv p_i - p_j + r_{il} - r_{jl},$$

dove i, j, l denota una permutazione qualsiasi degli indici 1, 2, 3. Osservato inoltre che nello spazio delle quattro variabili x_i, y_i, x_j, y_j la quadrica $p_i = p_j$ vien segata dal piano $x_i + y_i = x_j + y_j$ lungo le rette

$$x_i - x_j = y_i - y_j = 0 \qquad \text{ed} \qquad x_i - y_j = x_j - y_i = 0,$$

ne consegue che:

La curva Γ del 36° ordine — rappresentata dal sistema considerato nel n. 7 — si spezza nelle seguenti 11 componenti:

a) *quattro rette*, una delle quali è la

$$x_1 = x_2 = x_3, \qquad y_1 = y_2 = y_3,$$

le altre deducendosi da essa mediante G_{48};

b) *sei quartiche di 1ª specie*, di cui una è la curva

$$p_1 = p_2 = r_{12}, \qquad x_1 - x_3 = y_1 - y_3 = 0,$$

e le altre si ottengono da questa per mezzo di G_{48};

c) *una curva dell'8° ordine*, intersezione completa di tre quadriche indipendenti di un S_4, rappresentata dal sistema sovrabbondante:

$$s = 0, \qquad p_1 = p_2 = p_3 = r_{23} = r_{31} = r_{12}.$$

È inoltre utile considerare *otto punti razionali*, che denomineremo i punti P, trasformati mediante G_{48} del punto (0, 1, 0, 1, 0, 1). Si constata allora immediatamente che:

Ogni punto P *appartiene ad una delle rette* a) *ed a tre delle quartiche* b); *ognuna delle rette* a) *ed ognuna delle quartiche* b) *contiene rispettivamente due o quattro punti* P.

9. Dobbiamo ora trovare i punti razionali situati sulle curve *a*), *b*), *c*) dianzi definite. Quelli appartenenti alle *a*) corrispondono alle soluzioni razionali specificate nell'enunciato del n. 7, e fra essi vi sono ovviamente i punti P. Per stabilire il teorema del n. 7, non v'è dunque che da mostrare che le curve *b*) e *c*) non contengono nuovi punti razionali. Proviamo anzitutto che:

La curva c) *è totalmente priva di punti reali*,

All'uopo basta osservare l'identità

$$3[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2] \equiv s^2 + 2(p_1 + p_2 + p_3 - r_{23} - r_{31} - r_{12}),$$

da cui si desume che la curva *c*) giace sulla quadrica ottenuta annullandone il (secondo e quindi pure il) primo membro. Poichè il luogo dei punti reali situati su tale quadrica è il piano

$$x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = x_3 - y_3 = 0,$$

e siccome è subito visto che questo piano non incontra la curva *c*) (neppure nel campo complesso), così segue l'asserto.

Riferiamoci da ultimo alla prima quartica di 1ª specie definita in *b*), la quale, come sappiamo (n. 8), contiene quattro punti P. *A priori* potrebbe pensarsi che da essi potesse dedursi qualche altro punto razionale della quartica, quale intersezione residua di questa col piano congiungente tre punti scelti, con eventuali ripetizioni, fra quei quattro. Si verifica però subito che così non è, in quanto:

I quattro punti P *della quartica sono complanari, e si ripartiscono in due doppie tali che le tangenti alla quartica in punti di coppie diverse sono fra loro incidenti, e che il piano osculatore alla quartica in un punto di una coppia incontra la quartica ulteriormente nell'altro punto di tale coppia.*

La proiezione della quartica da un suo punto P — p. es. dal punto (0, 1, 0, 1, 0, 1) — su di un piano non passante per quello è pertanto una cubica piana, la quale, in corrispondenza ai quattro punti P della quartica, contiene quattro punti razionali formanti su essa una configurazione del secondo dei due tipi considerati nel primo capoverso del n. 1. L'equazione di questa cubica può p. es. ottenersi eliminando le x_1, y_1, x_2, y_2 fra le equazioni della quartica e le

$$x = -(x_1 - y_1 + x_2 + y_2)/2, \qquad y = x_1 + y_1 - x_2 - y_2, \qquad z = y_2 - y_1.$$

Un facile calcolo conduce così ad identificare tale equazione con quella deducibile dalla (1) col porvi $a = -1/12$. In base al primo teorema del n. 2, si ha dunque che:

Ciascuna delle quartiche considerate (nel n. 8, b)) *non contiene nessun punto razionale oltre ai quattro punti* P *che le appartengono.*

Ciò completa la dimostrazione del teorema enunciato nel n. 7.