Bollettino
Unione Matematica Italiana

L. Gatteschi, L. A. Rosati

Risposta ad una questione proposta da A. Moessner

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.1, p. 43–48.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_1_43_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1950.

Risposta ad una questione proposta da A. Moessner.

Nota di L. Gatteschi e L. A. Rosati (a Firenze).

Sunto. - *Come le prime righe della Nota.*

1. Recentemente A. Moessner [1] ha proposto la risoluzione del sistema diofanteo

(1) $A_1^2+B_1^2=A_2^2+B_2^2=A_3^2+B_3^2; \quad A_1^3+B_1^3=A_2^3+B_2^3=A_3^3+B_3^3.$

Noi qui dimostriamo che il sistema non ammette soluzioni reali con tre coppie (A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3) a due a due distinte, di più dimostriamo che il sistema

(2) $$A_1^2+B_1^2=A_2^2+B_2^2, \qquad A_1^3+B_1^3=A_2^3+B_2^3$$

non ammette soluzioni in numeri interi oltre le soluzioni banali.

La soluzione del sistema (1) implica la ricerca dei valori di h e di k per cui il sistema

(3) $$x^2+y^2=h, \qquad x^3+y^3=k,$$

ammette tre soluzioni reali e distinte.

Posto

$$x+y=u, \qquad xy=v,$$

abbiamo

$$v=(u^2-h)/2, \qquad u^3-3uv=k$$

dalle quali

(4) $$u^3-3hu+2k=0.$$

[1] *Bollettino dell' Unione Matematica Italiana*, (3), 4, (1949), pag. 146.

Detta u_r, $(r=1,\ 2,\ 3)$, una soluzione di quest'ultima e v_r, $(r=1,\ 2,\ 3)$, il corrispondente valore per la v a questa corrisponde per il sistema (3) la soluzione

$$(5)\quad x_r=[u_r+(u_r^2-4v_r)^{\frac{1}{2}}]/2,\quad y_r=[u_r-(u_r^2-4v_r)^{\frac{1}{2}}]/2;\ (r=1,2,3).$$

Deve quindi essere

$$u_r^2-4v_r=u_r^2-2u_r^2+2h=\Delta_r^2,$$

cioè

$$(6)\qquad 2h=u_r^2+\Delta_r^2,\qquad (r=1,\ 2,\ 3),$$

essendo Δ_r^2 un numero positivo o nullo e gli u_r devono essere inoltre tali che

$$(7)\qquad u_1+u_2+u_3=0,$$

$$(8)\qquad u_1u_2+u_1u_3+u_2u_3=-3h.$$

Dalla (7), innalzando al quadrato, si ha

$$u_1^2+u_2^2+u_3^2+2(u_1u_2+u_1u_3+u_2u_3)=0,$$

e per la (8)

$$(9)\qquad u_1^2+u_2^2+u_3^2=6h.$$

Dalla (6) si ha invece

$$6h=u_1^2+u_2^2+u_3^2+\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2,$$

che per la (9) ci dà

$$\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2=0.$$

E questa richiede che sia $\Delta_1^2=\Delta_2^2=\Delta_3^2=0$, quindi $A_r=B_r$, $(r=1,\ 2,\ 3)$ e cioè la soluzione banale $A_1=A_2=A_3=B_1=B_2=B_3$.

Si può arrivare più brevemente allo stesso risultato col seguente procedimento. Tenuto conto che l'espressione A^2-AB+B^2 è positiva per A e B reali, dalla seconda delle (1) si ricava che A_1+B_1, A_2+B_2, A_3+B_3, cioè u_1, u_2, u_3 quando non sono nulli hanno lo stesso segno, quindi, per la (7) $u_1=u_2=u_3=0$, che conduce ugualmente alla soluzione banale.

2. Passiamo ora a considerare il sistema (2), che ha la soluzione banale $A_1=A_2$, $B_1=B_2$. La sua risoluzione in interi equivale alla ricerca dei valori di h e di k per cui il sistema (3) ammette due soluzioni razionali intere distinte.

Siano (x_1,y_1), (x_2,y_2) le due soluzioni, possiamo supporre che sia

$$(10)\qquad (x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2)=1.$$

Posto

$$u_r=x_r+y_r,\qquad (r=1,\ 2),$$

osserviamo che dovendo risultare la coppia (A_1, B_1) distinta dalla (A_2, B_2) è $u_1 \neq u_2$ e come nel caso precedente, gli u_r, $(r = 1, 2)$, soddisfano l'equazione (4), inoltre si ha

$$(6') \qquad 2h = u_r^2 + \Delta_r^2 \qquad (r = 1, 2),$$

con Δ_r, $(r = 1, 2)$, interi.

Ricordiamo che se a è un numero intero è

$$a^2 \equiv 1, 0 \pmod{4},$$

quindi, poichè x_1, y_1, x_2, y_2 non possono essere per la (10) tutti pari dalla $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$ segue che se x_1 e y_1 sono entrambi dispari, x_2 e y_2 sono entrambi dispari; se x_1 e y_1 sono uno pari e l'altro dispari, x_2 e y_2 sono uno pari e l'altro dispari.

Nel primo caso u_1 e u_2 sono entrambi pari, nel secondo caso entrambi dispari.

Detta u_3 la terza radice (necessariamente intera) dalla (4) si hanno ancora le (7), (8) e (9).

Dalla (7) si ha che se u_1 e u_2 hanno un fattore primo in comune questo divide u_3 e poichè per la (8) il suo quadrato divide $3h$ esso divide h.

D'altra parte se un numero primo diverso da 2 divide u_1, u_2 e quindi h, essendo $x_r + y_r = u_r$, $x_r y_r = v_r = (u_r^2 - h)/2$, $(r = 1, 2)$, esso divide x_1, y_1, x_2, y_2.

Sarà allora

$$(u_1, u_2) = 2^l.$$

Per quanto detto supponiamo dapprima che u_1 e u_2 e quindi h e k siano dispari. Dalla (6') si ricava $u_1^2 + \Delta_1^2 = u_2^2 + \Delta_2^2$ ed è noto che la sua soluzione generale è (¹)

$$(11) \quad u_1 = \alpha\beta + \lambda\mu, \quad \Delta_1 = \alpha\lambda - \beta\mu; \qquad u_2 = \alpha\beta - \lambda\mu, \quad \Delta_2 = \alpha\lambda + \beta\mu,$$

dove α, β, λ e μ sono interi e nel nostro caso $(\alpha\beta, \lambda\mu) = 1$. D'altra parte per la (7) e per le (11) $u_3 = -2\alpha\beta$ ed essendo $u_1 u_2 u_3 = -2k$, (k dispari), questo fa escludere che α o β sia pari.

Per la (9) e per la (6') si ha rispettivamente

$$6\alpha^2\beta^2 + 2\lambda^2\mu^2 = 6h, \qquad \alpha^2\beta^2 + \lambda^2\mu^2 + \alpha^2\lambda^2 + \beta^2\mu^2 = 2h,$$

e quindi

$$(12) \qquad \lambda^2\mu^2 + 3\alpha^2\lambda^2 + 3\beta^2\mu^2 - 3\alpha^2\beta^2 = 0$$

da cui

$$(13) \qquad (3\beta^2 - 3\lambda^2)/(3\beta^2 + \lambda^2) = \mu^2/\alpha^2.$$

(¹) P. PASTERNAK, « Zeitschr. Math. Unterricht », 37, 1906, pp. 33-35. Cfr. anche L. E. DICKSON, *History of the Theory of Numbers*, vol 2°, 1934, New York, p. 252.

Avendo supposto u_1 ed u_2 dispari, per la (6′) anche Δ_1 e Δ_2 sono dispari. Non potendo poi, come abbiamo già osservato, nè α nè β esser pari, dalla (11) segue che λ e μ sono di parità differente; poichè la (12) non varia cambiando α con β e λ con μ, possiamo senza restrizione supporre che λ sia pari e μ sia dispari. Essendo $(\alpha, \mu) = 1$, $(\beta, \lambda) = 1$ se 3 non divide λ si ha

$$(14) \qquad 3\beta^2 - 3\lambda^2 = \mu^2, \qquad 3\beta^2 + \lambda^2 = \alpha^2$$

Infatti un divisore primo comune al numeratore e al denominatore del primo membro della (13) divide la loro differenza $4\lambda^2$, ed essendo numeratore e denominatore dispari, dividerà λ^2 e quindi $3\beta^2$, ma $(\beta, \lambda) = 1$ e se 3 non divide λ si ha che il primo membro è una frazione irriducibile e cioè le (14).

Le (14) sono manifestamente impossibili (mod. 4),

Se 3 divide λ, posto $\lambda = 6\lambda_1$, si ha ragionando come per la (14)

$$(15) \qquad \beta^2 - 36\lambda_1^2 = \mu^2, \qquad \beta^2 + 12\lambda_1^2 = \alpha^2.$$

Dalla prima delle (15) si ha

$$(16) \qquad (|\beta| + |\mu|)(|\beta| - |\mu|) = 36\lambda_1^2$$

per la quale tenuto conto che $(|\beta| + |\mu|)/2$ e $(|\beta| - |\mu|)/2$ sono primi fra di loro si ha

$$|\beta| + |\mu| = 18r^2, \qquad |\beta| - |\mu| = 2s^2,$$

oppure

$$|\beta| - |\mu| = 18r^2, \qquad |\beta| + |\mu| = 2s^2,$$

dove r ed s sono interi di parità differente primi fra loro.

Da quest'ultime e dalla (16) si ricava

$$(16') \qquad |\beta| = 9r^2 + s^2, \qquad |\lambda| = |r| \cdot |s|.$$

Dalla seconda delle (15) si ha

$$(17) \qquad (|\alpha| + |\beta|)(|\alpha| - |\beta|) = 12\lambda_1^2$$

ovvero

$$\frac{|\alpha| + |\beta|}{2} \cdot \frac{|\alpha| - |\beta|}{2} = 3\lambda_1^2.$$

Un eventuale divisore dei due fattori del primo membro deve dividere la loro somma $|\alpha|$ e la loro differenza $|\beta|$ quindi per la (12) uno almeno dei fattori λ e μ e ciò è impossibile essendo $(\alpha\beta, \lambda\mu) = 1$. Ne viene che indicando con m e con n due interi primi fra loro e di parità differente si ha

$$|\alpha| + |\beta| = 6n^2, \qquad |\alpha| - |\beta| = 2m^2,$$

oppure

$$|\alpha| - |\beta| = 6n^2, \qquad |\alpha| + |\beta| = 2m^2,$$

e da queste e dalla (17)

$$(18) \qquad |\beta| = 3n^2 - m^2, \quad |\lambda_1| = |m| \cdot |n|;$$

$$(19) \qquad |\beta| = m^2 - 3n^2, \quad |\lambda_1| = |m| \cdot |n|.$$

Dalle (18) e dalla prima delle (16') si ha

$$9r^2 + s^2 = 3n^2 - m^2,$$

cioè $s^2 + m^2 \equiv 0$ (mod. 3) che è impossibile.

Dalla (19) per le (16') si ha

$$9r^2 + s^2 = m^2 - 3n^2, \qquad |r| \cdot |s| = |m| \cdot |n|,$$

e si può porre $m = p_1q_1$, $n = p_2q_2$, $r = p_1p_2$, $s = q_1q_2$ nelle quali p_1, q_1, p_2. q_2 sono interi ralativamente primi dei quali uno è pari e gli altri tre sono dispari.

Sostituendo nella precedente si ha

$$9p_1^2p_2^2 + q_1^2q_2^2 = p_1^2q_1^2 - p_2^2q_2^2$$

e da questa

$$(q_1^2 + 3p_2^2)/(q_1^2 - 9p_2^2) = p_1^2/q_2^2.$$

Per le (16') e per le (19) m ed s e quindi q_1 non sono divisibili per 3. Se poi p_2 e q_1 sono dispari, p_1 e q_2 di parità differente allora il numeratore e il denominatore del primo membro della precedente sono rispettivamente $\equiv 4,0$ (mod. 8). Quindi si avrà

$$q_1^2 + 3p_2^2 = 4p_1^2, \qquad q_1^2 - 9p_2^2 = 4q_2^2,$$

nelle quali p_1 è dispari, q_2 è pari. Da queste

$$3p_2^2 = p_1^2 - q_2^2,$$

che nelle ipotesi fatte è impossibile.

Se p_2 e q_1 sono di parità differente si ha

$$q_1^2 + 3p_2^2 = p \qquad q_1^2 - 9p_2^2 = q_2^2.$$

Se q_1 è pari e quindi p_1, p_2, q_1 dispari le due equazioni sono impossibili (mod. 4).

Se p_2 è pari e quindi p_1, q_1, q_2 dispari posto $p_2 = 2\bar{p}$ si ha

$$q_1^2 + 12\bar{p}^2 = p_1^2, \qquad q_1^2 - 36\bar{p}^2 = q_2^2.$$

Ma questo sistema coincide col sistema (15) ed essendo $p_1\bar{p}q_1q_2 = mn/2 \neq 0$ (infatti $mn = 0$ porta $\lambda = 0$, $\alpha = \beta(\alpha = -\beta$, $u_1 = \alpha^2$, $u_2 = \alpha^2$ ma abbiamo supposto $u_1 \neq u_2$) e $\lambda_1 = mn > \bar{p}$, per il metodo della discesa infinita il sistema è impossibile.

Resta da esaminare il caso in cui x_1, y_1, x_2, y_2 sono tutti dispari e quindi u_1, u_2, u_3 tutti pari; in questo caso h risulta $\equiv 2 \pmod{4}$ per la (3) e $\equiv 0 \pmod{4}$ per la (8) e ciò è impossibile.

In ogni caso si ha dunque un assurdo e il sistema (2) non ammette soluzioni oltre quelle banali.