Bollettino Unione Matematica Italiana

Tommaso Boggio

Sopra due notevoli formule di calcolo vettoriale

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.1, p. 54–56.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_1_54_0>

Sopra due notevoli formule di Calcolo vettoriale.

Nota di TOMMASO BOGGIO (a Torino).

Sunto. - *Viene data una dimostrazione nuova, semplicissima, della formula che esprime la proprietà distributiva del prodotto vettoriale, e viene completata una dimostrazione, nota, della formula che esprime il doppio prodotto vettoriale.*

Se $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ sono tre vettori arbitrari, sussiste l'importante formula:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}, \tag{1}$$

che esprime *la proprietà distributiva del prodotto vettoriale.*

La dimostrazione che esporremo, riduce questa proprietà a quella analoga per il prodotto scalare dei vettori, la cui dimostrazione, come si sa, è assai semplice.

Sia perciò $\boldsymbol{d}$ un vettore qualunque, e osserviamo che per una nota proprietà del prodotto misto di 3 vettori, si ha:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d} = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{d} = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{d});$$

per la proprietà distributiva del prodotto dei vettori risulta:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{d}) + \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{d}),$$

cioè

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d} + \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d},$$

e per l'arbitrarietà del vettore $\boldsymbol{d}$ si conclude la (1).

([16]) Con indici in basso si indicano derivate parziali prime rispetto ad x_1, x_2, x_3, x_4 $\left(\text{così ad es. } f_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}\right)$. La condizione è senz'altro soddisfatta nei punti multipli della Jacobiana. Altre condizioni (in generale) equivalenti si hanno sostituendo al determinante (4) determinanti analoghi.

Un'altra relazione molto notevole è la seguente:

$$(2) \qquad (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a},$$

che è chiamata *la formula del doppio prodotto vettoriale.*

Tale formula è dimostrata da alcuni autori (BURALI-FORTI, BURGATTI) (*) con un ragionamento che mi pare non del tutto esauriente, perciò qui aggiungerò alcune considerazioni per completarlo.

Osserviamo che il vettore $(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c}$ è evidentemente normale al vettore $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ (oltre che al vettore $\boldsymbol{c}$), perciò è complanare coi vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, onde si può scrivere:

$$(\alpha) \qquad (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b},$$

ove x, y sono opportuni numeri reali; per trovare x, y moltiplichiamo scalarmente la (α) per il vettore $\boldsymbol{c}$ e avremo:

$$0 = x\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + y\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c},$$

alla quale si soddisfa ponendo:

$$y = h\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}, \qquad x = -h\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c},$$

ove h è un numero reale arbitrario; sostituendo nella (α) si ottiene:

$$(\beta) \qquad (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} = h(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a}).$$

A questo punto BURALI-FORTI soggiunge « h non può esser funzione di $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ perchè tanto il 1° che il secondo membro della (β) sono funzioni lineari di ciascuno di tali vettori; h deve essere una *costante assoluta* »; e BURGATTI, più concisamente, scrive « h è un numero indipendente dai vettori (per ragioni d'omogeneità) ».

Ora ciò non è sufficiente per concludere che h non dipende da $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

Per stabilire questa proprieta, invece di h scriviamo $h(a, b, c)$ per mettere in vista l'eventuale dipendenza di h dai vettori $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ e così avremo:

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} = h(a, b, c)(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a}),$$

da cui, moltiplicando scalarmente per un vettore arbitrario $\boldsymbol{d}$:

$$(\gamma) \qquad (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d} = h(a, b, c)(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{d} - \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{d});$$

(*) C. BURALI-FORTI, *Elementi di Calcolo vettoriale*, pag. 118 (« Enciclopedia delle Matematiche elementari »; vol. II, parte 2ª; Milano, a. 1938); P. BURGATTI, *Elementi di Calcolo vettoriale e omografico*, pag. 18 (Manuali Hoepli; Milano, a. 1937).

scambiando [illegible] d e cambiando poi i segni, si ha:

$$(a \wedge b) \wedge c \times d = h(a,\ b,\ d)(a \times c \cdot b \times d - b \times c \cdot a \times d),$$

onde $h(a,$ [illegible] $c) = h(a,\ b,\ d)$, perciò la funzione h è indipendente dal vettore c e può quindi indicarsi semplicemente con $h(a,\ b)$, in guisa che la (γ) può scriversi:

$$(a \wedge b) \wedge c \times d = h(a,\ b)(a \times c \cdot b \times d - b \times c \cdot a \times d);$$

scambiando a con c e b con d si ha:

$$(c \wedge d) \wedge a \times b = h(c,\ d)(a \times c \cdot b \times d - b \times c \cdot a \times d),$$

e poichè i primi membri di queste due eguaglianze sono eguali, ne viene $h(a,\ b) = h(c,\ d)$, perciò la h è indipendente pure dai vettori a e b, onde h è un *numero fisso*.

Per trovare h si suppongano i vettori a, b unitari e ortogonali fra loro, poi supponiamo $c = a$, $d = b$, e avremo dalla (γ):

$$(a \wedge b)^2 = h, \qquad \text{onde} \qquad h = 1,$$

perciò la (γ) risulta identica alla (2).

La (γ) diventa poi:

$$(a \wedge b) \times (c \wedge d) = a \times c \cdot b \times d - b \times c \cdot a \times d.$$

formula [illegible] quest oni