
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MARIO MANARINI

Sulla stabilizzazione di uno stato di equilibrio mediante azioni girostatiche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol.
5 (1950), n.1, p. 56–63.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_1_56_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Sulla stabilizzazione di uno stato di equilibrio mediante azioni girostatiche.

Nota di MARIO MANARINI (a Bologna).

Sunto. - *In questo lavoro viene discussa la stabilizzazione, per mezzo di azioni girostatiche, di uno stato di equilibrio di un sistema olonomo con n gradi di libertà a vincoli privi di attrito e soggetto a forze conservative, ricorrendo alla rappresentazione del movimento del sistema meccanico nello spazio S_n delle configurazioni, estendendo al caso degli n parametri il metodo del riferimento al sistema ruotante. Nel contempo si generalizza anche un teorema del LARMOR.*

Come è noto nelle equazioni del moto di un sistema olonomo con n gradi libertà, possono intervenire termini a carattere girostatico e, in tale circostanza, allorchè il sistema è soggetto a sollecitazione conservativa, si è indotti a discutere, mediante tali ter-

mini, la stabilizzazione di uno stato di equilibrio. Tale discussione è stata condotta applicando la teoria delle piccole oscillazioni, con la quale lo studio viene contenuto nei termini della stabilità lineare (1). Si è limitato lo studio a questa approssimazione per la difficoltà di calcolo a cui condurrebbe in generale una discussione rigorosa. Nel caso particolare di $n = 2$, realizzando il sistema meccanico mediante un punto mobile nel piano e per una sollecitazione centrale repulsiva, il LEVI-CIVITA ha dato ragione del risultato anche riferendo il moto del punto ad un particolare sistema ruotante in quel piano.

In questo lavoro, riattaccandomi a nozioni di Cinematica nello spazio ad n dimensioni sviluppate in una mia Memoria (*), ho esteso il metodo del riferimento al sistema ruotante al caso generale di un sistema olonomo con un numero qualsiasi n di gradi di libertà, interpretando il moto del sistema meccanico mediante il moto di un punto rappresentativo nello spazio delle configurazioni; limitandomi però a considerare specialmente forze conservative che, rappresentate in detto spazio, risultino di tipo particolare. Si ha così il vantaggio di poter condurre la discussione della stabilità dell'equilibrio applicando direttamente il teorema di LAGRANGE-DIRICHLET e di poter considerare anche il caso nel quale l'assenza del massimo del potenziale nella configurazione di equilibrio che si vuol stabilizzare sia deducibile dall'esame dei valori locali delle derivate di ordine superiore al secondo del potenziale stesso e discutere, per questa via, la stabilità, non semplicemente lineare, ma rigorosa.

Si può, incidentalmente, osservare che allorché le forze centrifughe rispetto al sistema di riferimento ruotante risultino trascurabili si ottiene immediatamente l'estensione del noto teorema di LARMOR che nello spazio ordinario stabilisce l'equivalenza, in prima approssimazione, di un campo magnetico uniforme ad una opportuna rotazione (*rotazione di LARMOR*) del sistema di riferimento.

Nel caso generale in cui la sollecitazione conservativa agente sul sistema meccanico non presenti la circostanza di cui sopra, col

(1) T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica razionale*. Voi. II, parte I. cap. VI, Ed. Zanichelli, Bologna 1926.

G. KRALL, *Meccanica tecnica delle vibrazioni*. Parte I, cap. IV, Ed. Zanichelli, Bologna 1940.

(*) M. MANARINI, *Sul calcolo plurivettoriale negli spazi S_n e applicazione alla Meccanica dei sistemi rigidi*, « Annali di Matematica pura ed applicata ». Serie IV, t. XII, 1933-2°.

metodo del riferimento al sistema ruotante ci si imbatte nella difficoltà che le equazioni del moto rispetto a tale riferimento contengono esplicitamente il tempo. Mi propongo di studiare nel seguito la questione; comunque mi sembra che il metodo possa presentarsi efficace anche nella circostanza accennata poichè, qualora nel riferimento al sistema fisso le forze siano funzioni lineari delle coordinate, si possono dare facilmente dei criteri di stabilità i quali possono servire, passando all'osservatore mobile, a dare criteri di stabilità per sistemi di equazioni differenziali con coefficienti variabili col tempo. E questo è un argomento ben lungi dall'essere esaurito.

1. Sia dato un sistema olonomo con n gradi di libertà, a vincoli privi di attrito e soggetto a forze conservative. Rappresentiamo il sistema meccanico nello spazio S_n delle configurazioni (a metrica euclidea) mediante il punto M riferito ad punto fisso O ; e poniamo che l'equazione del moto del punto rappresentativo M risulti della forma:

$$(1) \quad \ddot{M} + G\dot{M} = \text{grad}_M \psi[(M - O)^2],$$

nella quale G è un'omografia assiale costante ⁽¹⁾ e $\psi[(M - O)^2]$ è una funzione differenziabile in O che ammette le derivate in O fino ad un certo ordine e dipende dal potenziale della sollecitazione ed eventualmente anche dalla parte dell'energia cinetica indipendente da \dot{M} . Il termine $G\dot{M}$ che figura nella (1) è un termine a carattere girostatico; e diremo G l'*assiale girostatica* del sistema meccanico. I simboli \dot{M} e \ddot{M} indicano, rispettivamente, la derivata prima e la derivata seconda del punto M rispetto al tempo.

Disponendo della costante additiva del potenziale possiamo supporre che il punto O sia il punto rappresentativo della configurazione di equilibrio del sistema olonomo; la quale, in assenza del termine girostatico, verrà supposta instabile.

Riferiamo, in S_n , il moto del punto rappresentativo M ad un sistema ruotante intorno ad O , con rotazione definita dall'assiale $-\frac{1}{2}G$ e quindi con velocità angolare determinata dall' $(n-2)$ -vettore applicato ad essa corrispondente e che, in generale, sarà un $(n-2)$ -vettore-multiplo ⁽²⁾.

Applicando il teorema di CORIOLIS esteso al moto di un punto

⁽¹⁾ Cartesianamente, in un S_n un'omografia assiale è rappresentata da una matrice quadrata emisimmetrica di n linee ed n colonne.

⁽²⁾ M. MANARINI, loc. cit.

nello spazio S_n si ha ⁽¹⁾:

$$\ddot{M} = \ddot{M}_r - G\dot{M}_r + \frac{1}{4} G^2(M - O),$$

nella quale l'indice r indica che si tratta di velocità e di accelerazione relative al sistema di riferimento mobile.

D'altra parte, essendo:

$$\dot{M}_r = \dot{M} + \frac{1}{2} G(M - O),$$

risulta:

$$\ddot{M} = \ddot{M}_r - G\dot{M} - \frac{1}{4} G^2(M - O);$$

e quindi, sostituendo nella (1), abbiamo:

$$(2) \quad \ddot{M} = \text{grad}_M \psi[(M - O)^2] + \frac{1}{4} G^2(M - O)$$

Ricordando poi la formula che dà il gradiente di un prodotto scalare, otteniamo subito l'equazione del moto del punto rappresentativo M rispetto al sistema di riferimento ruotante nella forma:

$$(3) \quad \ddot{M} = \text{grad}_M U_r,$$

con:

$$(4) \quad U_r = \psi[(M - O)^2] + \frac{1}{8} G^2(M - O) \times (M - O).$$

Cioè il moto di M rispetto al sistema di riferimento ruotante avviene come se il sistema meccanico fosse sollecitato da forze conservative di potenziale rappresentato in S_n , dalla funzione U_r , data dalla (3) ⁽²⁾.

L'omografia G^2 che entra nella (4) è sempre una dilatazione ⁽³⁾

⁽¹⁾ Nel caso particolare di G costante, il teorema di CORIOLIS esteso al moto di un punto nello spazio S_n è immediatamente deducibile derivando, rispetto al tempo, la (10) del § 3 della mia Memoria citata e tenendo conto delle (8) e (9) della Memoria stessa.

⁽²⁾ Nel caso poi che, rispetto alla forza $\text{grad}_M \psi[(M - O)^2]$, la forza centrifuga $\frac{1}{4} G^2(M - O)$ sia trascurabile, la (2) si riduce alla:

$$\ddot{M}_r = \text{grad}_M \psi[(M - O)^2];$$

e si ha così l'estensione allo spazio S_n di un noto teorema di LARMOR, giacchè rimane dimostrata l'equivalenza, in prima approssimazione, del campo di forze sovrapposto a quello conservativo e che nell'equazione del moto si esplica nel termine $G\dot{M}$, alla precessione del sistema di riferimento con rotazione determinata dall'assiale $-\frac{1}{2} G$.

⁽³⁾ Cartesianamente un'omografia dilatazione è rappresentata da una matrice quadrata simmetrica.

ed è costante anche rispetto al sistema di riferimento ruotante. Invero calcolando le derivate rispetto al tempo delle sue componenti cartesiane secondo una n -pla ortogonale solidale col sistema ruotante e di versori i_s' , ($s = 1, 2, \dots, n$), si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(G^2 i_s' \times i_r') &= - \frac{d}{dt}(G i_s' \times G i_r') = - G \frac{d i_s'}{dt} \times G i_r' - G i_s' \times G \frac{d i_r'}{dt} = \quad (1) \\ &= \frac{1}{2} G^2 i_s' \times G i_r' + G i_s' \times \frac{1}{2} G^2 i_r' = \\ &= \frac{1}{2} | G(G i_s') \times G i_r' + G i_s' \times G(G i_r') | = \\ &= \frac{1}{2} | - G i_s' \times G(G i_r') + G i_s' \times G(G i_r') | = 0 \end{aligned}$$

($s, r = 1, 2, \dots, n$).

La discussione della stabilizzazione dello stato di equilibrio in O può essere condotta col teorema di LAGRANGE-DIRICHLET operando sul potenziale U_r che, come si è visto, involge l'assiale girostatica G .

La seconda parte del potenziale U_r è una forma quadratica definita negativa, poichè i coefficienti di dilatazione (*) di G^2 sono tutti negativi dato che, riferendoci ad una n -pla di direzioni unite di G^2 rispetto al sistema ruotante e determinata dai versori i_s' , si ha:

$$G^2 i_s' \times i_s' = - G i_s' \times G i_s' = - (G i_s')^2 < 0 \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

Il massimo del potenziale U_r in O può essere assicurato dalle sue derivate seconde calcolate in O . Qualora queste risultino tutte nulle l'esame verrà rivolto alle derivate successive in O della funzione $\psi[(M - O)^2]$. Anche se $\psi[(M - O)^2]$ avesse in O un minimo di carattere generale, si presenta l'eventuale possibilità di poter determinare G in modo che il potenziale U_r abbia in O un massimo effettivo.

Per quanto concerne la stabilità assoluta dello stato di equilibrio

(1) Per le formule di POISSON, estese allo spazio S_n (Cfr. la mia Memoria citata), nel nostro caso si ha:

$$\frac{d i_s'}{dt} = - \frac{G}{2} i_s' \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

(2) Per brevità e con analogia evidente, chiamo *coefficienti di dilatazione* di un'omografia vettoriale α i numeri:

$$\rho_s = \alpha i_s \times i_s \quad s = 1, 2, \dots, n)$$

dove i_s ($s = 1, 2, \dots, n$), costituisce una n -pla di versori che definisce una n -pla di direzioni unite ortogonali della dilatazione di α .

in O , ossia la stabilità rispetto all'osservatore fisso, ovviamente nulla vi è da aggiungere per quel che riguarda la posizione del sistema. Occorre invece provare che sono soddisfatte le condizioni richieste dalla stabilità dell'equilibrio anche per quel che concerne l'energia cinetica. Notiamo infatti che si ha:

$$(5) \quad M = \dot{M}_r - \frac{G}{2} (M - O);$$

ed osserviamo che, relativamente all'omeografia non nulla $\frac{1}{2}G$, è possibile trovare un numero k , positivo tale che per ogni punto M si abbia:

$$\left| \frac{G}{2} (M - O) \right| \leq k |M - O| \quad (6).$$

D'altra parte, una volta realizzata rispetto al sistema ruotante la stabilità dello stato di equilibrio in O , avremo che fissato un $\varepsilon > 0$, piccolo a piacere, è possibile trovare un numero $\eta > 0$, sufficientemente piccolo, tale che, essendo:

$$(6) \quad 2k |M^0 - O| < \eta, \quad \text{e} \quad |\dot{M}_r^0| < \eta$$

nelle quali M^0 e \dot{M}_r^0 indicano condizioni iniziali del sistema meccanico rispetto al sistema di riferimento ruotante, si abbia:

$$(7) \quad |M - O| < \frac{\varepsilon}{2k} \quad \text{e} \quad |\dot{M}_r| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'altra parte, per la (5), si ha:

$$(8) \quad |\dot{M}_r| \leq |\dot{M}| + k |M - O|$$

e quindi, per condizioni iniziali rispetto al sistema fisso per le quali si abbia:

$$(9) \quad |M^0 - O| < \frac{\eta}{2k} \quad \text{e} \quad |\dot{M}^0| < \frac{\eta}{2},$$

avremo per la (8):

$$(10) \quad |\dot{M}_r^0| < \eta.$$

Poichè dalla (5) risulta anche:

$$|\dot{M}| < |\dot{M}_r| + k |M - O|,$$

con le condizioni iniziali (9) avremo, per (10), (6) e (7):

$$|\dot{M}| < \varepsilon;$$

(4) Cfr., ad esempio, D. GRAFFI, *Sopra un'equazione funzionale e la sua applicazione ad un problema di Fisica ereditaria*. « Annali di Matematica pura ed applicata ». Serie IV, t. IX, 1931, pag. 147.

con la quale si assicura la stabilità dello stato di equilibrio in O del sistema meccanico, anche rispetto al sistema di riferimento fisso.

2. Si vede subito che l'assiale G e la dilatazione G^2 sono sempre due omografie o entrambe non degeneri o degeneri dello stesso rango r ⁽¹⁾ e con le stesse direzioni nulle. Invero se a è direzione nulla di G , ovviamente lo è anche di G^2 . Viceversa se a è direzione nulla di G^2 lo è anche di G perchè, posto che sia $G^2a = 0$, non può essere $Ga \neq 0$ in quanto, se ciò fosse, sarebbe $Ga \times Ga \neq 0$ e quindi anche $a \times G^2a \neq 0$; il che richiede che sia $G^2a \neq 0$, contro l'ipotesi.

Ricordiamo poi che il rango di G è r se, e soltanto se, per gli invarianti di G si ha:

$$I_n G = I_{n-1} G = \dots = I_{n-r+1} G = 0 \quad \text{e} \quad I_{n-r} G \neq 0,$$

e che gli invarianti di ordine dispari di un'omografia assiale sono tutti nulli ⁽²⁾.

Se r è il rango di G (e quindi anche di G^2) consideriamo in S_n , per O , lo spazio S_r delle direzioni nulle di G . Nello spazio S_{n-r} , per O , ortogonale ad S_r , può essere possibile ottenere col termine girostatico, la stabilità del sistema rispetto a spostamenti e velocità contenuti in questo spazio; e tale spazio S_{n-r} , per le proprietà suddette, ha sempre un numero pari di dimensioni. Quindi viene confermato il teorema che il termine girostatico stabilizza, eventualmente, soltanto un numero pari di gradi di instabilità.

3. Come caso particolare poniamo che sia semplicemente:

$$2\psi[(M - O)^2] = \rho(M - O)^2 \quad \rho > 0.$$

Si verifica certamente la circostanza del massimo effettivo in O del potenziale U_r qualora ρ sia minore del più piccolo dei valori assoluti dei coefficienti di dilatazione di $\frac{1}{4} G^2$.

Nel caso particolare di $n = 2$, allorquando cioè lo spazio delle configurazioni è il piano ordinario, l'assiale girostatica G è necessariamente della forma $G = 2\omega i$ dove i è l'operatore che, nel piano delle configurazioni, fa ruotare i vettori di $\frac{\pi}{2}$ nel senso levogiro.

(1) Un'omografia è di rango r se r è il numero delle sue direzioni nulle linearmente indipendenti.

(2) Cfr. M. MANARINI, loc. cit.

Ciò comporta che il sistema di assi ruotanti (al quale secondo la teoria precedente si deve riferire il moto del sistema meccanico) ha, rispetto al sistema di riferimento fisso, per velocità angolare ω . In questo caso è $G^2 = -4\omega^2$ e quindi per assicurare la stabilizzazione dello stato di equilibrio in O basta disporre del termine girostatico in modo che sia :

$$|\omega| > \sqrt{\rho},$$

conformemente al risultato del LEVI-CIVITA⁽¹⁾.

Tornando al caso generale, osserviamo che allorché si consideri un sistema con n gradi di libertà, mediante l'assiale girostatica G non possono venire eliminati i gradi di instabilità relativi allo spazio S_r , per O , delle direzioni nulle di G . Se il numero dei gradi di libertà è dispari, e quindi è dispari il numero delle dimensioni dello spazio S_n delle configurazioni, l'assiale girostatica G è sempre degenerare; onde nella circostanza precedente non è possibile, per mezzo di azioni girostatiche, eliminare un numero dispari di gradi di instabilità; si può invece eventualmente ottenere una stabilità parziale nello spazio S_{n-r} che non contiene direzioni nulle di G .

In uno spazio S_n , con un numero pari di dimensioni, l'assiale girostatica G può essere anche non degenerare e quindi, sempre nella circostanza di cui sopra, non è esclusa la possibilità di ottenere, mediante G , la stabilità completa del sistema meccanico in O .

Osserviamo che, in generale, l' $(n-2)$ -vettore dell'assiale girostatica G , posto che questa sia di rango r , si potrà scomporre nella somma di $n-r$ $(n-2)$ -vettori semplici; e quindi la rotazione considerata si potrà decomporre nella somma di $n-r$ rotazioni in iperpiani di S_n . Si tratterebbe di indagare come può essere esplicata l'azione di stabilizzazione di equilibrio di ognuna di queste rotazioni per le quali probabilmente si possono considerare forze di tipo più generale di quelle considerate in questo lavoro.

Nel caso di $n=3$ non esistono che bivettori semplici di rango $r=1$. Ne consegue che la rotazione del sistema di riferimento, ovviamente, non può avvenire che intorno ad un asse. In questo caso le forze che sollecitano il sistema meccanico potrebbero essere rappresentate in S_3 da una somma di forze centrali coi centri disposti lungo l'asse di rotazione. Nel caso di $n=4$ l'assiale girostatica G può essere anche non degenerare; e in questo caso si potrà disporre di tutti e quattro i coefficienti di rotazione di G^2 per studiare il modo di rendere massimo il potenziale U_r in O onde ottenere la stabilità completa dello stato di equilibrio in O .

(1) Loc. cit., pag. 491.