
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

TULLIO VIOLA

Un problema metrico relativo agli insiemi di punti, nel piano o nello spazio

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol.
5 (1950), n.1, p. 64–67.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_1_64_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Un problema metrico relativo agli insiemi di punti, nel piano o nello spazio.

Nota di TULLIO VIOLA (a Roma).

Sunto. - *Problema del minimo cammino evitando un insieme, nel senso precisato nelle prime righe della nota stessa.*

1. Sia E un generico insieme chiuso di punti, nel piano o nello spazio. Se A e B sono due punti estranei ad E ed appartenenti ad uno stesso campo ⁽¹⁾ complementare ad E , tali punti si possono congiungere mediante una curva semplice e rettificabile γ di PEANO-JORDAN, totalmente estranea ad E .

Si possono evidentemente tracciare infinite di tali curve γ e ci si può proporre di trovare e di studiare una curva Γ d'accumulazione per una successione $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$ che sia minimizzante della lunghezza $L(\gamma)$. Intendiamo che, se Λ è l'estremo inferiore delle lunghezze $L(\gamma)$ delle curve γ , le curve $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$ sono tali che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(\gamma_n) = \Lambda.$$

Quest' interessante problema è stato segnalato dal prof. M. PRONE, anni or sono, nel Suo corso d'Analisi Superiore.

2. Supponiamo di partire da una qualunque curva γ e di deformarla con continuità in modo da diminuirne via via la lunghezza, avendo però l'avvertenza che la curva non attraversi mai punti di E , anzi non tocchi mai E . Se E è piano, al tendere di detta lunghezza al proprio estremo inferiore, la curva γ tende ad una curva d'accumulazione $\bar{\gamma}$, unica e ben determinata, le cui proprietà possono ritenersi note, appartenendo sostanzialmente alla teoria classica degli isoperimetri e a quella, più moderna, detta della geometria infinitesimale diretta ⁽²⁾.

$\bar{\gamma}$ è rettificabile e la sua lunghezza è esattamente uguale all'e-

⁽¹⁾ Questo termine è inteso nel senso di « regione connessa ».

⁽²⁾ È il problema del filo teso fra due punti evitando un ostacolo, o del minimo cammino girando attorno a una città, ecc.

stremo inferiore or ora citato ⁽³⁾. Inoltre essa è rettilinea nell'intorno d'ognuno dei propri punti estranei ad E . Se $\bar{\gamma}$ possiede punti di E (come certamente ne possiede e costituenti necessariamente un insieme parziale chiuso della frontiera FE , almeno se il segmento AB non è totalmente estraneo ad E), $\bar{\gamma}$ ha ivi sempre le due semirette tangenti, rispettivamente verso A e verso B . Nell'intorno d'uno qualunque di questi punti, se le dette semirette non sono per diritto, E è contenuto interamente nell'angolo minore di π , ch'esse formano. Se invece le dette semirette sono per diritto, E è interamente situato da una stessa banda di tali semirette (fatta al più eccezione di punti situati su $\bar{\gamma}$ stessa). Più precisamente e in forma riassuntiva:

nell'intorno del punto, E è sempre situato da una stessa banda della curva (a meno che E non si riduca semplicemente ad un certo gruppo di punti situati sulla curva stessa) ⁽⁴⁾.

Tutte queste proprietà si possono del resto ritenere quasi evidenti e permettono di dedurre che $\bar{\gamma}$ si può suddividere in archi ciascuno dei quali volge la concavità da una stessa parte (pur includendo, in tali archi, eventuali porzioni rettilinee). Se si considera uno qualunque di questi archi, si riconosce facilmente che i punti di FE che cadono su di esso, fatta al più eccezione di quelli che eventualmente appartenessero a una porzione rettilinea terminale dell'arco stesso, giacciono tutti sempre da una stessa parte rispetto alla $\bar{\gamma}$ variabile (di cui, come s'è detto, la $\bar{\gamma}$ è una curva d'accumulazione): precisamente da quella parte, verso cui il detto arco di $\bar{\gamma}$ volge la concavità.

Meno evidente è la proprietà che *il numero dei detti archi è necessariamente finito*. Per dimostrare questa proposizione, possiamo ragionare per assurdo. Se esistessero, su $\bar{\gamma}$, infiniti archi cosiffatti, esisterebbe su $\bar{\gamma}$ anche un punto P d'accumulazione per un'infinità degli archi stessi (P distinto sia da A che da B). Quest'accumulazione può essere unilaterale o bilaterale: è, in ogni caso, lecito considerare una successione infinita $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ di tali archi, che volgano la concavità alternativamente da una parte e dall'altra della $\bar{\gamma}$ e che tendano a P susseguendosi ordinatamente, sulla $\bar{\gamma}$, in uno stesso dei due versi \overrightarrow{AB} , oppure \overleftarrow{BA} . Siano $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$

⁽³⁾ Cfr. per es. T. BONNESEN: *Les problèmes des isopérimètres et des isépi-phanes*. Collez. Borel, Parigi 1929, p. 53.

⁽⁴⁾ Cfr. per es. G. BOULIGAND: *Introduction à la géométrie infinitésimale directe*. Parigi 1932, pp. 91, 106, 135 ecc. Da quest'opera si possono ricavare facilmente altre proprietà locali di $\bar{\gamma}$, oltre a quelle che qui indichiamo.

punti di E (precisamente di FE) scelti a piacere, uno per ciascuno, sugli archi C_n ⁽⁵⁾.

Per quanto sopra s'è osservato, i punti P_n giacciono alternativamente da parti opposte rispetto alla γ variabile e tendente a $\bar{\gamma}$: la γ deve dunque costantemente passare per il punto P cui tende la successione $\{P_n\}$. (Infatti, se γ non passasse per P , lascierebbe da una stessa parte tutto un intorno completo di P). Ma P , come punto d'accumulazione di punti di FE , appartiene anch'esso ad FE e quindi anche ad E , ciò che contraddice alla definizione della curva variabile γ .

I « punti angolosi » di $\bar{\gamma}$, cioè i punti di $\bar{\gamma}$ nei quali le semirette tangenti, sopra indicate, non sono per diritto, formano un insieme tutt'al più numerabile ⁽⁶⁾.

3. Continuando a supporre E piano, i teoremi classici assicurano ora l'esistenza (non però l'unicità!) d'una curva Γ , la sua rettificabilità ed anche che la lunghezza $L(\Gamma)$ non può superare Λ ⁽⁷⁾.

Una qualunque curva Γ (n. 1) condivide con una $\bar{\gamma}$ (n. 2) due proprietà: quella d'esser rettilinea nell'intorno d'ognuno dei propri punti estranei ad E , e quella d'avere in comune con E soltanto punti alla frontiera di E . Ma, per il resto, Γ non gode affatto di proprietà così particolari come $\bar{\gamma}$; anzi (a parte il comportamento di E nel suo intorno) Γ può essere una curva rettificabile di tipo molto generale. Un'effettiva successione minimizzante $\{\gamma_n\}$ può esser costruita col semplice procedimento seguente. Si scelga (cosa certamente possibile) un numero $\varepsilon > 0$, < 1 e tanto piccolo che i due punti A, B appartengano a uno stesso campo complementare all'involucro E_ε (di raggio ε) dell'insieme E ⁽⁸⁾, e si considerino le successive potenze ε^n ($n = 1, 2, \dots$) di ε . Per un qualunque valore di n , l'involucro E_{ε^n} è costituito da un numero finito o da un'infinità numerabile di domini connessi: precisamente, in ogni cerchio del piano (per quanto grande) cadono al più un numero finito di domini connessi costituenti E_{ε^n} ⁽⁹⁾. Perciò le curve Γ rela-

⁽⁵⁾ Questa scelta può ovviamente regolarizzarsi, considerando che la parte di FE appartenente a $\bar{\gamma}$ è chiusa.

⁽⁶⁾ A. DENJOY: *Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues*, « Journal de Math. pures et appliquées », 1915, p. 147; G. DURAND: *Critère de dénombrabilité*. « Acta Mathematica », vol. 56. 1931.

⁽⁷⁾ Cfr per es. L. TONELLI: *Fondamenti di calcolo delle variazioni*, Vol. I, Bologna 1921, pp. 87, 75.

⁽⁸⁾ E_ε è l'insieme formato da tutti i punti del piano, le cui distanze da E non superano ε .

⁽⁹⁾ G. BOULIGAND: loc. cit. alla nota ⁽⁴⁾, p. 37

tive ad E_{ε^n} ⁽¹⁰⁾ sono necessariamente in numero finito, e solo tutte del tipo $\bar{\gamma}$ (indicato al n. 2) *relativamente ad* E_{ε^n} ⁽¹¹⁾: indichiamole con $\Gamma_1^{(n)}, \Gamma_2^{(n)}, \dots, \Gamma_{k_n}^{(n)}$. Sia γ_n una qualunque di queste curve $\Gamma_i^{(n)}$ ($i = 1, 2, \dots, k_n$) ⁽¹²⁾.

Che la successione $\{\gamma_n\}$, così costruita, è in realtà minimizzante relativamente ad E , si può dimostrare immediatamente con la seguente considerazione. Prefissato un numero $\eta > 0$ comunque piccolo, indichiamo con γ_η una curva unente A, B , totalmente estranea ad E e tale che sia

$$L(\gamma_\eta) < \Lambda + \eta$$

Se ν è il più piccolo intero positivo, tale che ε^ν sia minore della distanza di γ_η da E , si riconosce che γ_η è totalmente estranea anche ad ogni E_{ε^n} con $n \geq \nu$. Dunque, per ogni $n \geq \nu$, è $L(\gamma_n) \leq L(\gamma_\eta)$, e ciò basta a dimostrare l'asserto.

4. Quali analogie sussistono *nello spazio tridimensionale*? Quanto precede dà particolare risalto e interesse alle complicazioni notevolissime che subito si presentano: già per una curva del tipo $\bar{\gamma}$ (n. 2) le cose vanno, nello spazio, in modo del tutto differente. Esse vanno all'incirca come per una Γ (nel piano o nello spazio): si può cioè affermare l'esistenza, non l'unicità, d'una $\bar{\gamma}$, permanendo soltanto, in ogni caso, le due proprietà di cui all'inizio del secondo capoverso del n. 3.

Se E è un dominio semplicemente connesso, il problema particolare, enunciato al principio del n. 2, viene a identificarsi, sia nel piano che nello spazio, con quello generale del n. 1. Ma, come s'è detto, *nello spazio* le complicazioni dei due problemi sono ugualmente gravi: ne daremo un saggio in una prossima nota, costruendo un esempio di dominio tridimensionale E semplicemente connesso e limitato da una superficie quadrabile, la quale sia anzi dotata di piano tangente variabile con continuità (e magari anche di elementi differenziali d'ordine prefissato elevato a piacere) in ogni punto estraneo alla curva d'accumulazione Γ . Dimostriamo, per tale dominio E , la notevole limitazione:

$$L(\Gamma) < \Lambda.$$

⁽¹⁰⁾ Curve d'accumulazione per successioni di curve γ estranee ad E_{ε^n} e minimizzanti $L(\gamma)$.

⁽¹¹⁾ Ciò si possono ottenere per deformazione continua (nel senso precisato al n. 2), da curve γ estranee ad E_{ε^n} .

⁽¹²⁾ È appena necessario avvertire che è possibile indicare una ben determinata legge di scelta, la stessa per ogni n .