BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LUIGI MERLI

Sull'approssimazione delle funzioni continue di due variabili mediante polinomi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.1, p. 68–71.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_1_68_0>

Sull'approssimazione delle funzioni continue di due variabili mediante polinomi.

Nota di Luigi Merli (a Firenze).

Sunto. - *Si dimostra la convergenza dei polinomi di interpolazione di* Lagrange, *per le funzioni lipschitziane di due variabili.*

1. Ricordiamo che assegnati i *punti fondamentali*

$$\begin{array}{llll} x_1^{(1)} & & & \\ x_1^{(2)}, & x_2^{(2)} & & \\ x_1^{(3)}, & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ x_1^{(n)}, & x_2^{(n)}, \ldots, & x_n^{(n)}, & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \end{array}$$

zeri del polinomio $\omega_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - x_k^{(n)})$, $(n = 1, 2, \ldots)$, ed una funzione $f(x)$, il polinomio di interpolazione di Lagrange $L_n[f(x)]$, che nei punti dati assume rispettivamente i valori $f(x_1^{(n)})$, $f(x_2^{(n)}), \ldots,$ $f(x_n^{(n)})$, è dato dalla formula

$$L_n[f(x)] = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)}) l_k^{(n)}(x), \tag{1}$$

dove

$$l_k^{(n)}(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k^{(n)})\omega'_n(x_k^{(n)})}. \tag{2}$$

Esso risulta un polinomio in x di grado $\leq n-1$, e se $f(x) = g_m(x)$, con $g_m(x)$ polinomio di grado $m \leq n-1$, si ha

$$L_n[g_m(x)] \equiv g_m(x),$$

per cui, facendo $g_m(x) \equiv 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} l_k^{(n)}(x) \equiv 1, \ (^1). \tag{3}$$

(1) Cfr.: per le notazioni, L. Merli, *Recenti risultati sulla convergenza dei polinomi di interpolazione di Lagrange e di Hermite*, « Giornale Ist. It. Attuari », XI, 1, (1940), pp. 1-12.

Si consideri ora un doppio sistema di *punti fondamentali*

$$\begin{array}{llll}
x_1^{(1)} & & & \\
x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & & \\
x_1^{(3)}, & x_2^{(3)}, & x_3^{(3)} & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \\
x_1^{(n)}, & x_2^{(n)}, & \ldots, & x_n^{(n)} \\
\cdots & \cdots & \cdots &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{llll}
y_1^{(1)} & & & \\
y_1^{(2)}, & y_2^{(2)} & & \\
y_1^{(3)} & y_2^{(3)} & y_3^{(3)} & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \\
y_1^{(m)} & y_2^{(m)} & \ldots & y_m^{(m)} \\
\cdots & \cdots & \cdots &
\end{array}$$

e supponiamo che nei punti di coordinate $(x_k^{(n)}, y_i^{(m)})$ siano assegnati i corrispondenti valori $f(x_k^{(n)}, y_i^{(m)})$, ivi assunti da una funzione $f(x, y)$ di due variabili. Si vede subito che il polinomio di grado $n-1$, al massimo, in x ed $m-1$, al massimo in y che nei punti dati coincide con i valori assegnati, è dato dalla formula

$$(4) \qquad L_{m,n}[f(x, y)] = \sum_{k=1}^{n} \left[l_k^{(n)}(x) \sum_{i=1}^{m} l_i^{(m)}(y)\, f(x_k^{(n)}, y_i^{(m)}) \right],$$

dove

$$l_k^{(n)}(x) = \frac{u_n(x)}{(x - x_k^{(n)})\, u'_n(x_k^{(n)})}, \qquad l_i^{(m)} = \frac{v_m(y)}{(y - y_i^{(m)})\, v'_m(y_i^{(m)})},$$

con

$$u_n(y) = \prod_{s=1}^{n} (x - x_s^{(n)}), \qquad v_m(y) = \prod_{r=1}^{m} (y - y_r^{(m)}).$$

La (4) pertanto dà il polinomio di interpolazione di LAGRANGE per le funzioni di due variabili. Anche qui, come nel caso di una sola variabile, se $g_{n,m}(x, y)$ è un polinomio di grado $\leq n-1$ in x, $\leq m-1$ in y, si ha identicamente

$$(5) \qquad L_{n,m}[g_{n,m}(x, y)] \equiv g_{n,m}(x, y),$$

ed in particolare, per $g_{n,m}(x, y) \equiv 1$,

$$(6) \qquad 1 \equiv \sum_{k=1}^{n} l_k^{(n)}(x) \sum_{i=1}^{m} l_i^{(m)}(x)$$

come, del resto, segue anche direttamente dalla (3).

Si consideri ora la doppia successione dei polinomi

$$(4) \qquad \| L_{n,m}[f(x, y)] \| ;$$

analogamente a quanto è stato fatto per le successioni (1) relative alle funzioni di una sola variabile, ci proponiamo, in questa breve nota, di studiare il comportamento della successione (4) quando $m \to \infty$ ed $n \to \infty$ e dimostreremo precisamente il *teorema: se* f(x, y) *è una funzione periodica, di periodo* 2π, *in ciascuna delle due variabili* x *ed* y, *e soddisfacente alla condizione di* LIPSCHITZ *di parametro* λ, *ossia* $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq \lambda[|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|]$, *nell'ipotesi che i punti fondamentali siano gli zeri* $x_k^{(n)} = \cos \vartheta_k^{(n)}$, $\vartheta_k^{(n)} = \frac{2k-1}{2n}\pi$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$, $y_i^{(m)} = \cos \vartheta_i^{(m)}$, $\vartheta_i^{(m)} = \frac{2i-1}{2n}\pi$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, *del polinomio di* TCHEBYCHEFF *di prima specie, e supposto che sia* $h \leq \frac{m}{n} \leq k$, *con* h *e* k *costanti assegnate, si ha*

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} L_{n,m}[f(x, y)] = f(x, y) \tag{7}$$

e ciò uniformemente per $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ (²).

2. Osserviamo in primo luogo che è

$$\sum_{k=1}^{n} |\, l_k^{(n)}(x) \,| = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k^{(n)})(x - x_k^{(n)})} \right| < C \log n, \tag{8}$$

con C costante assoluta, indipendente da n.

Infatti, essendo $\omega_n(x) = \cos n\vartheta$, $x = \cos\vartheta$, tenuto conto che è $\omega_n'(x) = \frac{n \operatorname{sen} n\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta}$, $x = \cos\vartheta$, per $x = x_k^{(n)}$, ossia per $\vartheta = \vartheta_k^{(n)} = \frac{2k-1}{2n}\pi$, si ha $\omega_n'(x_k^{(n)}) = (-1)^{k-1}\frac{n}{\operatorname{sen}\vartheta_k^{(n)}}$, e quindi

$$\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k^{(n)})(x - x_k^{(n)})} = (-1)^{k-1}\frac{\cos n\vartheta \operatorname{sen}\vartheta_k^{(n)}}{n(\cos\vartheta - \cos\vartheta_k^{(n)})}, \quad (0 \leq \vartheta \leq \pi),$$

per cui

$$\sum_{k=1}^{n} |\, l_k^{(n)}(x) \,| = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\cos n\vartheta \operatorname{sen}\vartheta_k^{(n)}}{n(\cos\vartheta - \cos\vartheta_k^{(n)})} \right| = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\cos n\vartheta \operatorname{sen}\vartheta_k^{(n)}}{2n \operatorname{sen}\frac{\vartheta - \vartheta_k}{2} \operatorname{sen}\frac{\vartheta + \vartheta_k}{2}} \right|,$$

ed essendo

$$\frac{\operatorname{sen}\vartheta_k^{(n)}}{\operatorname{sen}\frac{\vartheta + \vartheta_k}{2}} \leq 2, \qquad |\cos n\vartheta| = |\operatorname{sen} n(\vartheta - \vartheta_k^{(n)})|,$$

(²) Nel recente fascicolo del « Mathematical Reviews ». (vol. 10, n. 8, (1949), pag. 529), abbiamo visto recensito un lavoro di BEZLYUDNYI, sullo stesso argomento [BEZLYUDNYI A. S. *The approximation of periodic functions of two variables by interpolatory trigonometric polynomials*, « Doklady Akad. Nauk SSSR (N. S.) », 65, (1949), pag. 257-260]. Noi non abbiamo potuto leggere direttamente tale lavoro, comunque le condizioni poste sulla $f(x, y)$ sono diverse dalle nostre.

otteniamo:

$$\sum_{k=1}^{n}\left|l_k^{(n)}(x)\right| < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\operatorname{sen} n(\vartheta - \vartheta_k^{(n)})}{\operatorname{sen}\dfrac{\vartheta - \vartheta_k^{(n)}}{2}}\right| < C\log n \ (^3)$$

Tenuto conto, poi, che qualunque sia il polinomio $P_{n,m}(x, y)$, di grado $\leq n-1$ in x, e $\leq m-1$ in y, si ha:

$$(5) \qquad P_{n,m}(x, y) = \sum_{k=1}^{n}\left[l_k^{(n)}(x)\sum_{i=1}^{m} l_i^{(m)}(y)P_{n,m}(x_k^{(n)}, y_i^{(m)})\right],$$

risulta:

$$|f(x, y) - L_{n,m}[f(x, y)]| < |f(x, y) - P_{n,m}(x, y)| +$$
$$+\left|\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{u_n(x)}{u_n'(x_k^{(n)})(x - x_k^{(n)})}\sum_{i=1}^{m}\frac{v_m(x)}{v_m'(y_i^{(m)})(y - y_i^{(m)})}\left[f(x_k^{(n)}, y_i^{(m)}) - P_{n,m}(x_k^{(n)}, y_i^{(m)})\right]\right\}\right|$$

Ossia, posto $\max\limits_{\substack{-1\leq x\leq 1\\ -1\leq y\leq 1}}|f(x, y) - P_{n,m}(x, y)| = \Delta_{n,m}$, e tenuto conto della (8)

$$|f(x, y) - L_{n,m}[f(x, y)]| \leq$$
$$\leq \Delta_{n,m}\left[1 + \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{u_n(x)}{u_n'(x_k^{(n)})(x - x_k^{(n)})}\right|\sum_{i=1}^{m}\left|\frac{v_m(y)}{v_m'(y_i^{(m)})(y - y_i^{(m)})}\right|\right] \leq$$
$$\leq \Delta_{n,m}[1 + C^2\log n\log m].$$

Per le ipotesi fatte sulla $f(x, y)$, è possibile associare agli interi n ed m un polinomio $P_{n,m}(x, y)$ dei gradi rispettivamente $n-1$ in x ed $m-1$ in y, in modo che si abbia:

$$\Delta_{n,m} < M\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right),$$

con M costante assoluta (4), sarà allora:

$$|f(x, y) - L_{n,m}[f(x, y)]| \leq M\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)(1 + C^2\log n\log m),$$

e, tenuto conto che, per ipotesi, è $h \leq \frac{m}{n} \leq k$, segue il teorema

(3) Cfr.: L. MERLI, *Sulla approssimazione delle funzioni continue mediante polinomi*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », serie VIII, vol. I, fasc. 11, (1946), pagg. 1175-1180

(4) Cfr.: E. I. MICKELSON, *On the approximate representation of a function of two variables*, « Trans. of the Am. Math. Soc. » 33, 3, (1931), pagg. 759-781.