Bollettino Unione Matematica Italiana

Giuseppe Palamà

Funzioni di Laguerre di 2ª specie

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.1, p. 72–77.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_1_72_0>

Funzioni di Laguerre di 2ª specie.

Nota di GIUSEPPE PALAMA (a Lecce).

Sunto. *Il Lavoro è sunteggiato nella breve introduzione che segue.*

In questa Nota ci occupiamo delle funzioni di LAGUERRE e di HERMITE di 2ª specie, cioè degli integrali non polinomi delle

(1) $$xy'' + (\alpha - x + 1)y' + ny = 0,$$

(2) $$y'' - 2xy' + 2ny = 0,$$

che indichiamo rispettivamente con $l_n^{(\alpha)}(x)$, (o $l_n(x)$ a seconda che α è o no diverso da zero), $h_n(x)$.

Gli $h_n(x)$ sono stati già studiati (¹), ma non ci consta che siano stati considerati gli $l_n^{(\alpha)}(x)$.

1. L'integrale generale della

(3) $$xy'' + (\gamma - x)y' - \beta y = 0$$

è dato da

(4) $$y = AG(\beta, \gamma, x) + Bx^{1-\gamma}G(\beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x),$$

ove A, B sono costanti arbitrarie e $G(\beta, \gamma, x)$ è la funzione di KUMMER, data da

(5) $$G(\beta, \gamma, x) = \lim_{\varepsilon \to 0} F\left(\beta, \frac{1}{2}, \gamma, \varepsilon x\right) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)} \sum_0^\infty \frac{\Gamma(\beta + m)x^m}{\Gamma(\gamma + m)m!},$$

essendo F la funzione ipergeometrica di GAUSS.

Intanto poichè (1) e (3) si identificano se si fa

$$\gamma = \alpha + 1, \qquad \beta = -n,$$

l'integrale generale della (1) è, come è noto

$$y = AG(-n, \alpha + 1, x) + Bx^{-\alpha}G(-\alpha - n, 1 - \alpha, x),$$

ma l'integrale generale della stessa (1) è anche

$$y = CL_n^{(\alpha)}(x) + Dl_n^{(\alpha)}(x),$$

(¹) Cfr. per es. P. APPEL-J. KAMPE DE FERIET, *Fonctions Hypergeom et Hypersph. - Polyn. d'Hermite.* Paris, (1926), pagg. 357-62.

quindi devono sussistere due relazioni del tipo

$$L_n^{(\alpha)}(x) = MG(-n,\ \alpha+1,\ x),$$

(6) $$l_n^{(\alpha)}(x) = Nx^{-\alpha}G(-\alpha-n,\ 1-\alpha,\ x),$$

con M, N costanti.

Ora lo sviluppo di $L_n^{(\alpha)}(x)$ e quello di G dato dalla (5), danno subito il valore di M e quindi la

(7) $$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)}G(-n,\ \alpha+1,\ x).$$

Se invece assumiamo nella (6)

(8) $$N = -\frac{\Gamma(\alpha)}{\sqrt{2\pi}},$$

abbiamo

(8') $$l_n^{(\alpha)}(x) = -\frac{\Gamma(\alpha)}{\sqrt{2\pi}}x^{-\alpha}G(-\alpha-n,\ 1-\alpha,\ x).$$

e quindi

$$l_n^{(\alpha)}(x) = -\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\sqrt{2\pi}}\sum_0^\infty \frac{\Gamma(\alpha-m)x^{m-\alpha}}{\Gamma(\alpha+n-m+1)m!},$$

L'opportunità della assunzione (8) si vedrà in seguito.

2. Le funzioni di LAGUERRE di 2ª specie soddisfano, sembra, a tutte le relazioni degli $L_n^{(\alpha)}(x)$. Infatti si ha per es.

$$\frac{dl_n^{(\alpha)}(x)}{dx} = -l_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)$$

(l'assunzione (8) fa intanto sussistere la precedente),

$$(n+1)l_{n+1}^{(\alpha)}(x) - (2n+\alpha+1-x)l_n^{(\alpha)}(x) + (\alpha+n)l_{n-1}^{(\alpha)}(x) = 0.$$
$$x l_n^{(\alpha+2)}(x) - (\alpha+1+x)l_n^{(\alpha+1)}(x) + (\alpha+n+1)l_n^{(\alpha)}(x) = 0.$$

Quest'ultima è ricorrente rispetto al parametro α [2].

3. Se nella (1) si suppone $\alpha = -p$, (p intero $< n$), la (6') diventa un polinomio e si deve avere perciò una relazione del tipo

$$A\,L_n^{(-p)}(x) = x^p L_{n-p}^{(p)}(x)$$

[2] Cfr. G. PALAMÀ, *Sui polinomi di Laguerre*, « Boll. dell'Un. Mat. It. », vol. XVII (1938), pag. 21.

che sussiste identicamente per

$$A = \frac{(-1)^p n!}{(n-p)!},$$

si ha pertanto la semplice relazione che segue

(9) $\quad (-1)^p n!\, L_n^{(-p)}(x) = (n-p)!\, x^p L_{n-p}^{(p)}(x), \quad$ per $n \geq p$, p intero.

Poichè d'altra parte

$$\frac{d^p L_n(x)}{dx^p} = (-1)^p L^{(p)}{}_{n-p}(x),$$

si ha anche per la (9)

$$\frac{d^p L_n(x)}{dx^p} = \frac{n!}{(n-p)!} x^{-p} L_n^{(-p)}(x)$$

in cui la derivata p–esima di $L_n(x)$ è espressa mediante un polinomio dello stesso ordine n.

4. Per stabilire la relazione che intercede fra $h_n(x)$ e $l_n^{(\alpha)}(x)$, basta cambiare nella (3) x in x^2 e fare $\gamma = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{n}{2}$, la (3) allora diventa

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0,$$

al cui integrale generale può darsi una delle tre forme seguenti, a seconda della parità di n, quando si tenga presente la (7):

a) $n = 2n$

$$y = A_0 G\left(-n, \frac{1}{2}, x^2\right) + B_0 G\left(-n + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right),$$

$$y = A_0 \frac{n!\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} L_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(x^2) + \frac{B_0}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} l_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(x^2),$$

$$y = A_1 H_{2n}(x) + B_1 h_{2n}(x);$$

b) $n = 2n + 1$

$$y = C_0 G\left(-n - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right) + D_0 x G\left(-n, \frac{3}{2}, x^2\right),$$

$$y = \frac{C_0 x}{\sqrt{\pi}} l_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x^2) + \frac{D_0 n!\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} x L_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x^2),$$

$$y = C_1 h_{2n+1}(x) + D_1 H_{2n+1}(x),$$

in cui A_i, B_i; C_i, D_i sono costanti arbitrarie.

Devono perciò sussistere delle relazioni del tipo

$$H_{2n}(x) = AG\left(-n, \frac{1}{2}, x^2\right),$$

$$H_{2n}(x) = BL_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(x^2),$$

$$h_{2n}(x) = A'G\left(-n+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x\right),$$

$$h_{2n}(x) = B'l_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(x^2),$$

che a mezzo degli sviluppi noti di $H_{2n}(x)$, $L_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(x^2)$, della funzione di KUMMER e di $l_n^{(\alpha)}(x)$ dato dalla (6'), danno rispettivamente le

$$H_{2n}(x) = \frac{(-1)^n(2n)!}{n!} G\left(-n, \frac{1}{2}, x^2\right),$$

(10) $$H_{2n}(x) = (-1)^n n!\, 2^{2n} L_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(x^2),$$

$$h_{2n}(x) = (-)^n 2^{2n+\frac{1}{2}} n!\, xG\left(-n+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right),$$

(11) $$h_{2n}(x) = (-1)^n n!\, 2^{2n} l_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(x^2).$$

Analogamente si hanno le altre

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(2n+1)!}{n!}\, 2xG\left(-n, \frac{3}{2}, x^2\right).$$

(10') $$H_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} n!\, 2^{2n+1} x L_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x^2),$$

$$h_{2n+1}(x) = (-1)^n n!\, 2^{2n+\frac{1}{2}} G\left(-n-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right),$$

(11') $$h_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} n!\, 2^{2n+1} x l_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x^2).$$

Le (10), (10') sono le note formule di SZEGÖ che legano i polinomi di LAGUERRE e d'HERMITE e le (11), (11') sono le analoghe per le funzioni di 2ª specie che, si noti, sono dello stesso tipo delle (10) e (10'). La (8) ha consentito anche quest'altro risultato.

Si hanno subito poi i seguenti sviluppi di $h_{2n}(x)$, $h_{2n+1}(x)$

$$h_{2n}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2}}(2n)! \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-m\right)x^{2m+1}}{\Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right)m!},$$

$$h_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n(2n+1)!}{\sqrt{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)x^{2m}}{\Gamma\left(n-m+\frac{3}{2}\right)m!}.$$

Va notato infine che la stessa relazione che sussiste fra il polinomio D'HERMITE $H_n(x)$, cui noi ora ci siamo riferiti, e che ha lo sviluppo

$$H_n(x) = (-1)^n n! \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!},$$

e l'altro polinomio d'HERMITE che indichiamo con $\overline{H}_n(x)$ dato invece da

$$\overline{H}_n(x) = n! \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k x^{n-2k}}{k!(n-2k)!\,2^k},$$

intercede anche fra le corrispondenti funzioni di 2ª specie, cioè fra le nostre $h_n(x)$, definite da (11) e (11'), e le altre che indichiamo per il momento con $\overline{h}_n(x)$, date da [3]

$$\overline{h}_{2n}(x) = \frac{(-1)^n n!\,2^n}{\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k \Gamma\left(-n+\frac{1}{2}+k\right) x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

$$\overline{h}_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1} n!\,2^n}{\Gamma\left(-n-\frac{1}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k \Gamma\left(-n-\frac{1}{2}+k\right)}{(2k)!} x^{2k};$$

ossia qualunque sia la parità di n, si ha

$$\overline{h}_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^{\frac{n}{2}}} h_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

5. Stabiliamo ora una notevole espressione della $l_n^{(\alpha)}(x)$.

Si ponga perciò nella (1)

(12) $$y = x^{-\alpha} e^x z.$$

Si ha così la

(13) $$xz'' + (-\alpha + x + 1)z' + (n+1)z = 0,$$

il cui integrale generale è pertanto dato da

(14) $$z = Ax^\alpha e^{-x} L_n^{(\alpha)}(x) + Bx^\alpha e^{-x} l_n^{(\alpha)}(x),$$

con A, B costanti arbitrarie.

Ma la (13) si ottiene derivando n volte la

(15) $$xu'' + (-\alpha - n + x + 1)u' + u = 0$$

(3) Cfr. l. c. in (1), pag. 358.

che alla sua volta segue dalla stessa (13) quando vi si fa $n = 0$ e si cambia poi α in $\alpha + n$, perciò l'integrale generale della (15) è dato da

$$u = C_1 x^{\alpha+n} e^{-x} + C_2 x^{\alpha+n} e^{-x} l_0^{(\alpha+n)}(x), \qquad C_i \text{ cost. arbit,}$$

e per essere

$$z = \frac{d^n u}{dx^n},$$

si ha anche

$$z = C_1 \frac{d^n}{dx^n} (x^{\alpha+n} e^{-x}) + C_2 \frac{d^n}{dx^n} [x^{\alpha+n} e^{-x} l_0^{(\alpha+n)}(x)]. \tag{16}$$

Se ora si confronta (14) con (16), poichè è

$$x^\alpha e^{-x} L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} (x^{\alpha+n} e^{-x})$$

si ricava

$$l_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [x^{\alpha+n} e^{-x} l_0^{(\alpha+n)}(x)]$$

che è appunto la formula che si voleva stabilire.

6. La funzione di Laguerre di 2^a specie soddisfa ad (1) anche quando n è negativo. Valori semplici di $l_n^{(\alpha)}(x)$ si hanno per $n = -1$, $n = -2$. Difatti si ha

$$l_{-1}^{(\alpha)}(x) = \Gamma(\alpha) x^{-\alpha} e^x,$$

$$l_{-2}^{(\alpha)}(x) = \Gamma(\alpha - 1) x^{-\alpha} e^x (\alpha - 1 - x)$$

purchè nella prima di esse sia $\alpha \neq 0, -1, -2, \ldots$ e nella seconda $\alpha \neq 1, 0, -1, -2, \ldots$.

Ecco invece una relazione integrale per $l_n^{(\alpha)}(x)$ che si ricava da altra classica relativa a $G(\beta, \gamma, x)$

$$l_n^{(\alpha)}(x) = \frac{-\sqrt{2\pi}\, x^{-\alpha}}{2\Gamma(-\alpha - n) n! \operatorname{sen} \pi\alpha} \int_0^1 u^{-\alpha-n-1}(1-u)^n e^{ux} du.$$

da cui per $n = 0$, si trae

$$l_0^{(\alpha)}(x) = \frac{-\sqrt{2\pi}\, x^{-\alpha}}{2\Gamma(-\alpha) \operatorname{sen} \pi\alpha} \int_0^1 u^{-\alpha-1} e^{ux} du.$$