Bollettino
Unione Matematica Italiana

Giuseppe Varoli

Una proposizione di G. A. Kinner ed il problema della trisezione dell'angolo

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.1, p. 78–81.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_1_78_0>

SEZIONE STORICO-DIDATTICA

Una proposizione di G. A. Kinner ed il problema della trisezione dell'angolo.

Nota di GIUSEPPE VAROLI (a Bologna).

Sunto. - *Si considera una proposizione di* G. A. KINNER *e si indica, in relazione ad essa, un metodo ed uno strumento per effettuare la trisezione dell'angolo.*

1. In una lettera di G. A. KINNER, diretta a C. HUYGENS (¹), sono enunciate due proposizioni geometriche riguardanti la trisezione dell'angolo. Gli sviluppi che si possono trarre da una di esse (²) non sembrano privi di interesse (cfr. nn. 3, 4).

Nella sua massima generalità la proposizione che interessa può essere posta nella forma seguente: « *Se due perpendicolari, che si incontrano in un punto di un cerchio, staccano su una tangente un segmento il cui punto medio è il punto di tangenza, l'arco compreso fra punto di tangenza e punto di intersezione di una sola retta è un terzo dell'arco, contenente il punto di tangenza, che tale retta stacca sul cerchio* ».

(¹) *Oeuvre Complètes* de CHRISTIAAN HUYGENS, pubbliées par la Société Hollandaise des Sciences. Tome I. Correspondance (1638-1656). Lettre n. 211, pagg. 314-316.

(²) La proposizione fu presentata in « Il Bollettino di Matematica » (Fasc. IV, 1942, pag. 60; Fasc. I, 1943, pag. 15) fra le « Questioni Proposte ».

2. Siano q, s due rette perpendicolari che si incontrano nel punto A del cerchio di centro O (fig. 1), intersecandolo ulteriormente in C, B; t una tangente in D che incontra q, s rispettivamente in E, F, essendo $DE = DF$.

Il triangolo rettangolo EAF è inscrittibile nel semicerchio di diametro EF e centro D, ne risulta $AD = DE$ e quindi $\widehat{DAE} = \widehat{DEA}$.

La parallela ad EF, condotta da C, incontri il cerchio in G; risulta $\widehat{GCA} = \widehat{DEA} = \widehat{DAE}$, quindi gli archi AG, DC sono uguali.

Il raggio OD, perpendicolare in D ad EF, è perpendicolare in H

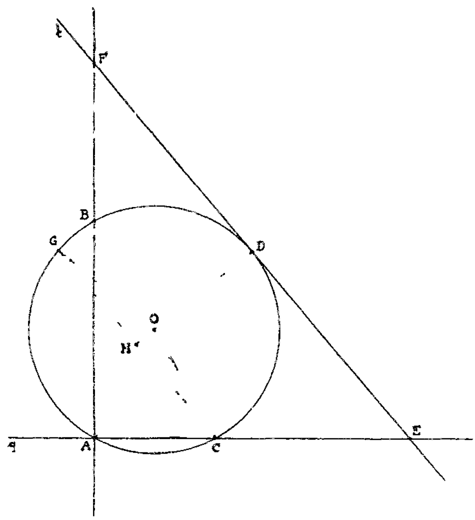

Fig. 1.

a CG; OH, essendo altezza del triangolo isoscele CGO, è bisettrice degli angoli GOC, ne risulta $\widehat{GD} = \widehat{DC}$.

Dunque gli archi AG, DC, GD sono uguali, con ciò è dimostrato che l'arco DC è un terzo di $\widehat{ADC}$.

Nello stesso modo si dimostra che l'arco DB è un terzo di $\widehat{BDA}$.

3. Le perpendicolari q, s incontrandosi nel punto A del cerchio di centro O lo dividono nei tre archi BC, CA, AB (fig. 2). Conduciamo le tangenti t, t', t'' ai tre archi nei punti D, D', D''

« *Se i punti di tangenza* D, D′, D″ *risultano rispettivamente i punti medi dei segmenti* EF, E′F′, E″F″ *che le rette* q, s *staccano sulle tangenti* t, t′, t″, *queste formano un triangolo equilatero*

La proposizione discende in modo immediato da quella enunciata nel n. 1. Infatti risulta: $\widehat{D'C} = \frac{1}{3}\,\widehat{CD'A}$, $\widehat{CD} = \frac{1}{3}\,\widehat{ADC}$, quindi $\widehat{D'C} + \widehat{CD} = \frac{1}{3}(\widehat{CD'A} + \widehat{ADC})$, cioè l'arco $D'D$ è un terzo del cerchio.

Risulta poi: $\widehat{D''B} = \frac{1}{3}\widehat{AD''B}$, $\widehat{BD} = \frac{1}{3}\widehat{BDA}$, quindi $\widehat{D''B} + \widehat{BD} = \frac{1}{3}(\widehat{AD''B} + \widehat{BDA})$, cioè l'arco $D''D$ è un terzo del cerchio.

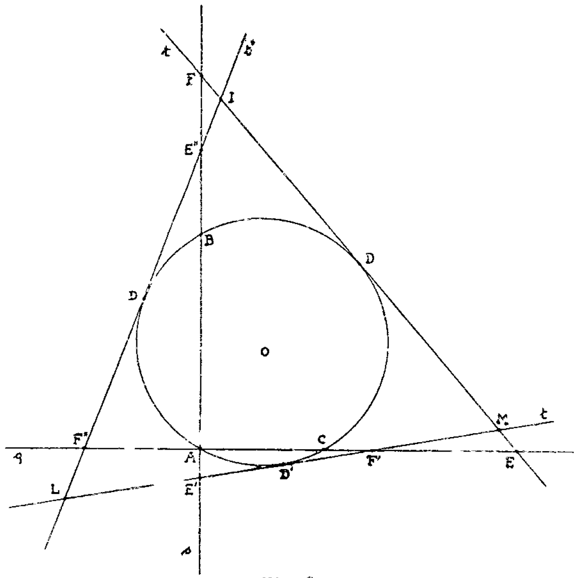

Fig 2.

Dunque i punti di tangenza D, D', D'' dividono il cerchio in tre parti eguali: così è dimostrato che il triangolo ILM, formato dalle tangenti t, t', t'', è equilatero.

4. La proposizione del Kinner, di cui nel n. 2 abbiamo dato una dimostrazione elementare semplicissima, si presenta particolarmente interessante in quanto suggerisce un metodo molto semplice e rapido per effettuare la trisezione dell'angolo.

Dato l'angolo α di vertice O (fig. 3), e descritto un arco di cerchio di centro O e raggio r, intersecante i lati di α in A, B, si conduca per A, B la retta q e ad essa in A la perpendicolare s. Tracciando una tangente t all'arco AB in modo che il punto di tangenza C sia il punto medio del segmento DE, si ottiene l'angolo COB che è un terzo di α.

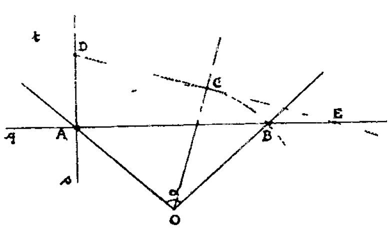

Fig. 3.

La difficoltà di condurre una retta t che sia tangente ad un cerchio in un punto che è incognito, dovendo esso risultare punto medio del segmento che due rette date staccano sulla stessa tangente che si deve condurre, si supera praticamente mediante una semplice riga graduata R, con doppia graduazione a partire dal centro (fig. 4), portante un sottilissimo foro P all'incrocio della retta costituente il bordo non graduato con la perpendicolare PQ ai due bordi in corrispondenza dello zero delle graduazioni. La riga R permette di effettuare tutte le costruzioni necessarie per la completa soluzione del problema (non occorre tracciare nè l'arco di cerchio nè la tangente t).

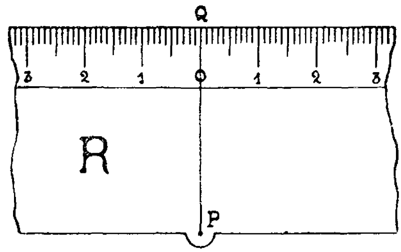

Fig. 4.

L'uso della riga R è immediato: portati sui lati dell'angolo α due segmenti OA, OB (fig. 3) eguali a PQ, si tracci per A, B la retta q e ad essa in A la perpendicolare s. Tenendo fermo P su O, mediante uno spillo, si farà girare R in modo che q, s stacchino sulle due graduazioni segmenti eguali; quando ciò avviene il punto C. corrispondente allo zero di R, fornisce la trisezione di α.

5. La lunghezza y del segmento di tangente t, compreso fra le rette q, s, risulta $y = 4r \operatorname{sen} \frac{\alpha}{3}$.

Nell'intervallo $(0, 2\pi)$ y assume massimo per $\alpha = \frac{3}{2}\pi$, massimo che vale $4r$.

Dunque per poter effettuare la trisezione di un angolo qualunque è sufficiente che la riga R abbia una lunghezza quadrupla di PQ (3).

Osservazione. - Volendo, si può limitare la lunghezza di R a $2r\sqrt{3}$, perchè per angoli $\alpha > \pi$ si può operare su $2\pi - \alpha$, facendo poi la differenza da $\frac{2}{3}\pi$ (cfr. n. 3 e fig. 2).

(3) Dal punto di vista pratico l'esattezza che si può ottenere è tanto maggiore quanto maggiore è la distanza PQ; con $PQ = $ cm. 5 l'esattezza è già rilevante. Una riga R lunga cm. 20 è quindi sufficiente per effettuare la trisezione di un angolo qualunque.