UMI

Recensioni

* Nicolas Bourbaki, Topoligie générale: chap. X. - Espaces fonctionels, Herman, Paris, 1949 (Lorenzo Calabi)
* W. Ledermann, Itroduction to the theory of finite Groups, Boyd Ldt., Edinburgh and London (Giovanni Sansone)
* J. G. Semple, L. Roth, Introduction to algebraic geometry, The Clarendon Press, Oxford, 1949 (Beniamino Segre)
* L. Roy, Cours de Mécanique Rationalle T. IV, Problèmes et exercises suivi d'un appendice sur les Fusées, Gauthier-Villars, Paris, 1950 (Giorgio Sestini)
* F. G. Richardson, Dynamics of real fluids, Edward and Co., London, 1950 (Tristano Manacorda)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.1, p. 90–95.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_1_90_0>

RECENSIONI

Nicolas Bourbaki: *Topologie générale: chap. X. - Espaces fonctionnels.* Paris, Hermann, 1949, pp. 101, fr. franc 750.

L'opera di N. Bourbaki progredisce rapidamente: già 10 sono i volumi usciti (di alcuni, esauriti, è in preparazione la seconda edizione), 4 i « libri » almeno parzialmente pubblicati. Il volume che analizziamo termina il libro di topologia generale.

Volumi pubblicati dall'ultima recensione in questo Bollettino (S. 3, vol. 3, pag. 181):

Algèbre, chap. 3 - Algèbre multilinéaire (1948, pp. 155).

Topologie générale, chap. 9 - Utilisation des nombres réels en topologie générale (1948, pp. 101).

Fonctions d'une variable réelle, chapp. 1, 2, 3 - Dérivées, Primitives et Intégrales, Fonctions élémentaires (1949, pp. 184).

È la prima volta, a mia saputa, che gli spazi funzionali vengono studiati e le loro proprietà esposte con metodo unitario e sistematico; che risultati classici, posti nella loro cornice naturale e liberati da inutili restrizioni, vengono dimostrati utilizzando proprietà congenite. Un tale lavoro di chiarificazione, generalizzazione e coordinamento è stato reso possibile in questi anni dai progressi realizzati in topologia generale, particolarmente con la definizione degli spazi uniformi (A. Weil, 1937). Ricordiamo che la topologia nella sua forma moderna sorse proprio per impulso dell'analisi funzionale: ma che differenza tra la tesi di Fréchet (1906) ed il volume di cui ci occupiamo ora!

La trattazione, rigorosa e sintetica ma elegante ed esauriente, si appoggia sui capitoli 1, 2, e 9 del libro, di cui applica i risultati; senza abbandonare l'usuale livello di generalità e di « astrazione » essa arriva a risultati così specifici e così « concreti », mettendoli in un quadro così armonioso e semplice che, penso, essa è più che sufficiente per mostrare, a chi ancora se lo domandasse, a che cosa possa ben servire la topologia generale moderna.

Il metodo seguito essendo quello assiomatico, viene messa in chiara luce l'influenza di ciascuna delle ipotesi che si possono fare sull'insieme di definizione e su quello dei valori delle funzioni in istudio. Come vedremo più sotto, queste ipotesi, molto larghe in principio, si restringono via via, sino a raggiungere quel grado di specalizzazione che è necessario per ottenere tutti i risultati classici e che è utile per poter applicare la teoria alle varie discipline ed ai vari casi che i matematici possono trovarsi a dover studiare.

Ed è così che quest'opera non è una monografia per specialisti: studiosi di topologia, di analisi, di calcolo delle variazioni, di gruppi topologici etc. vi troveranno metodi cui spesso potranno inspirarsi e risultati di cui non raramente avranno bisogno.

Lo strumento principale che ha permesso di considerare anche funzioni a valori in spazi non metrici, è, come accennato, la nozione di spazio uniforme. E ed F essendo due insiemi, notiamo con $\mathfrak{F}(E, F)$ l'insieme di tutte le applicazioni di E in F: per definirvi una struttura topologica (quindi per es. una nozione di convergenza) è sufficiente ammettere F munito di una struttura uniforme: ne sia V una prossimanza e sia $\mathfrak{S}$ una famiglia (non vuota) di parti di E. Definiamo allora, per ogni V e ogni sottoinsieme finito $A_1, A_2, \ldots, A_n$ di elementi di $\mathfrak{S}$, $W(\bigcup A_i, V)$ come l'insieme delle coppie (u, v) di applicazioni u, v di E in F tali che $(u(x), v(x)) \in V$ *se* $x \in \bigcup A_i$. Questi W formano un sistema fondamentale di prossimanze di una struttura uniforme su $\mathfrak{F}(E, F)$ e definiscono quindi anche una struttura topologica.

Queste due strutture sono specialmente interessanti e ricevono dei nomi particolari quando $\mathfrak{S}$ verifica determinate proprietà:

— se $\mathfrak{S}$ è l'insieme delle parti di E ridotte ad un elemento, si avrà la struttura uniforme e la topologia della *convergenza semplice*.

— se $\mathfrak{S}$ si riduce all'insieme E, le strutture corrispondenti si chiameranno della *convergenza uniforme*.

— Qualora E sia uno spazio topologico, si può prendere per $\mathfrak{S}$ la famiglia degli insiemi compatti di E: avremo allora le strutture uniforme e topologica della *convergenza compatta*.

Vi sono delle proprietà di $\mathfrak{F}(E,F)$ che non dipendono nè da E nè da $\mathfrak{S}$, ma sono unicamente determinate da F. Così per es. $\mathfrak{F}(E,F)$ è completo (= ogni filtro, e quindi ogni successione, di Cauchy converge) se e solo se F è completo. Un rapido studio del sottoinsieme delle funzioni limitate di E nello spazio F, supposto metrico, completa lo studio delle proprietà indipendenti da E, che formano l'argomento del *primo paragrafo*.

D'ora innanzi si supporrà E munito di una topologia: nel *paragrafo 2* si considera la parte $\mathfrak{C}(E,F)$ di $\mathfrak{F}(E,F)$, insieme delle funzioni continue di E in F. In particolare si studiano le strutture della convergenza uniforme e della convergenza compatta, generalizzando risultati di Dini e Arzelà.

Nel *terzo paragrafo* si definiscono e studiano le nozioni di equicontinuità e di equicontinuità uniforme; nel *quarto* gli insiemi compatti di $\mathfrak{C}(E,F)$, che portano al teorema di Ascoli, dimostrato ammettendo unicamente che lo spazio E sia localmente compatto e che lo spazio F sia uniforme separato. In questi due paragrafi si studiano pure gruppi di omeomorfismi, quali sottoinsiemi di $\mathfrak{C}(E,E)$.

Un *ultimo paragrafo* espone, seguendo il lavoro di Stone, l'approssimazione delle funzioni numeriche continue (teoremi di Dini, Weierstrass, Stone).

Secondo lo schema abituale, Bourbaki completa ogni paragrafo con buon numero di esercizi, che più appropriatamente si potrebbero chiamare complementi non dimostrati: preziosi per un miglior inquadramento della teoria generale tra i risultati particolari classici, aiutano assai ad una migliore comprensione grazie anche a ben scelti esempi.

Ripetiamo esplicitamente che questo capitolo può essere intieramente compreso colla sola conoscenza dei capp. 1, 2 e 9 (quest'ultimo solo per alcune poche pagine) della Topologie générale.

Completa il volume, dopo una succinta nota storica, un *dizionario* di topologia (ricordiamo che l'autore si propone di terminare ogni suo libro con un simile dizionario). Dopo una saporitissima pagina, citata dal Traité élémentaire de chimie di LAVOISIER, viene una lista di circa 800 termini in francese, inglese e tedesco, presi dalle opere dei principali topologhi: di ogni termine si dà la definizione (sia direttamente sia rinviando al libro di Bourbaki) e la traduzione in francese. Lavoro utilissimo per principianti e non specalisti.

LORENZO CALABI

W. LEDERMANN: *Introduction to the Theory of finite Groups.* Boyd Ltd.; Edinburgh and London, University Mathematical Texts - General Editors A. C. Aitken, D. E. Rutherford pp. VIII + 152, 8-6.

Il volumetto, dedicato agli studenti dei primi corsi di matematica, si muove sul piano tradizionale, ed espone in forma piana, con adeguati esempi tratti dall'aritmetica e dalla geometria, le nozioni fondamentali della teoria dei Gruppi finiti.

Nel Cap. I sono dati i due concetti basilari di gruppo astratto (finito o infinito) e di isomorfismo tra gruppi; nel Cap. II sono studiate le classi di elementi di un gruppo e in particolare i suoi sottogruppi, e determinati tutti i gruppi di ordine non superiore ad otto; nel Cap. III sui gruppi di permutazioni, è dimostrato il teorema di Cayley sull'isomorfismo di un gruppo astratto con un gruppo di permutazioni e sono costruiti i gruppi dei poliedri regolari; nei Cap. IV e V sono stabiliti i classici teoremi di Jordan-Hölder sui gruppi fattoriali, di Galois sul gruppo alterno e di Sylow sui sottogruppi di un gruppo finito di ordine uguale alla potenza di un numero primo; nel Cap. VI con l'introduzione del concetto di base viene precisata la struttura dei gruppi abeliani.

Lo studio del volume riuscirà assai utile a chi vorrà acquistare un primo e sicuro orientamento per la lettura di opere più complete e recenti quali il « Lehrbuch der Gruppentheorie » di H. Zassenhaus (Leipzig, 1937) e quello sui « Gruppi astratti » di Gaetano Scorza (Roma, 1942).

GIOVANNI SANSONE

J. G. SEMPLE e L. ROTH: *Introduction to algebraic geometry* (Oxford, The Clarendon Press, 1949), pp. XVI-446, 30 scellini.

L'interessamento verso la geometria algebrica è andato sensibilmente aumentando in questi ultimi anni, specie all'estero, sebbene chi intendesse volgersi ad approfondire tale disciplina rischiasse di smarrirsi fin dagli inizi fra le sottigliezze critiche dei rigoristi, oppure si vedesse costretto ad affrontare la lettura — sovente non agevole — di grossi trattati. La situazione può dirsi oggi a tale riguardo assai migliorata, grazie all'opera meritoria dei due Geometri di Londra, i quali sono riusciti a condensare in essa — in modo agile e perspicuo — i risultati più significativi della teoria proiettiva delle varietà algebriche, ed anche una limpida introduzione alla geometria sopra una curva od una superficie algebrica. L'ampia e multiforme materia è ivi trattata con mano maestra e consumata perizia didattica, mettendo in piena luce il contenuto geometrico delle questioni prese in esame, rifuggendo dalle astrattezze e dalle generalità eccessive, limitandosi in certi punti delicati a qualche citazione e facendo opportuno uso dell'intuizione geometrica.

Il libro va caldamente raccomandato al principiante, il quale — colla sua guida — perverrà rapidamente nel cuore di teorie svariate, cogliendone l'intima armonia ed i mutui riposti legami. Egli potrà in un secondo tempo, approfondire su altri testi qualche capitolo, od occuparsi delle questioni critiche sui fondamenti (ivi soltanto accennate), oppure proseguire nello studio delle varietà algebriche dal punto di vista delle trasformazioni birazionali: in ogni caso la lettura di quell'opera gli avrà fornito un vasto utilissimo materiale sperimentale, insieme al gusto, alla sensibilità ed alla preparazione geometrica all'uopo necessarie.

Quella lettura riesce poi estremamente interessante e piacevole per la splendida ricchezza del contenuto, per i numerosissimi esempi, per lo stile piano ed elegante, per l'abile impiego di vari caratteri e di tabelle con cui vien dato opportuno risalto ai risultati salienti ed alla loro concatenazione, per l'ottima veste tipografica. Particolarmente pregevoli sono le Note in carattere minuto poste alla fine dei diversi capitoli, le quali — in forma semplice e stringata — gettano luce su argomenti soltanto sfiorati nel testo, arrecando non di rado contributi originali. È però un peccato che manchino indici riguardanti le locuzioni, gli autori citati, gli esercizi e gli argomenti complementari in carattere minuto.

Il trattato è diviso in tredici capitoli, i quali possono venir raggruppati in sezioni come ora diremo. Dopo un capitolo introduttivo ove trovansi riunite alcune nozioni fondamentali sugli spazi subordinati e sulle proiettività di un iperspazio, sulle forme, sulle varietà e sulle corrispondenze algebriche, vengono quattro capitoli dedicati alla teoria generale delle curve piane algebriche ed alle trasformazioni razionali. Più precisamente, il cap. II tratta delle singolarità e delle subaggiunte di una curva piana, del genere, e delle curve di genere 0 ed 1; il cap. III, dopo alcune generalità sulle trasformazioni razionali o birazionali fra piani e sulle trasformazioni quadratiche, perviene rapidamente allo scioglimento delle singolarità ed alla nozione di molteplicità d'intersezione; il cap. IV verte sulle corrispondenze sopra la retta, in un piano e fra curve, col teorema di Lüroth, la regola di Zeuthen e numerose applicazioni (teorema di Bézout, formule di Plucker e di Cayley, invarianza del genere, ecc.); infine il cap. V stabilisce il teorema di Noether dell'$Af + B\varphi$ e quelli connessi di Serret, Cayley-Bacharach e Clifford.

I capitoli VI VIII dànno un'esposizione particolareggiata di varie proprietà dei sistemi lineari, e della tecnica inerente alla rappresentazione delle varietà razionali su di uno spazio lineare. Lo studio preliminare dei sistemi lineari di curve nel piano (cap. VI), col teorema di Bertini e le generalità sui modelli proiettivi, sui sistemi jacobiani, ecc., conduce nel cap. VII a molteplici applicazioni relative a superficie razionali particolari (quadriche, cubiche, superficie di Veronese, rigate, superficie di Del Pezzo) ed alle trasformazioni cremoniane f - piani. Ciò viene poi proseguito nel cap. VIII coll'approfondimento di alcune notevoli trasformazioni cremoniane nello spazio, e collo studio di varie interessanti V_3 razionali effettuato coll'uso delle relative rappresentazioni sopra un S_3; assai istruttiva è p. es. la via con cui (a p. 175) si perviene ad una tangente privilegiata di una superficie in un punto cuspidale di una linea doppia

I capitoli IX e X, che sono fra i più esaurienti e scorrevoli, si riferiscono rispettivamente ai caratteri proiettivi di curve e superficie ed alla geometria della retta. Nel cap. IX, fra l'altro, si perviene alle equazioni — ottenute empiricamente da Salmon e poi stabilite da Cayley e Zeuthen — relative alle superficie in S_3, si studiano vari problemi numerativi concernenti curve e superficie intersezioni totali o parziali di forme, e si esprimono gli invarianti aritmetici di una superficie in funzione dei caratteri proiettivi di questa. Particolarmente originale è l'elaborazione del cap. X, che contiene in forma incisiva le proprietà più notevoli dei sistemi algebrici infiniti di rette in S_3 ed in S_4, dedotte dallo studio delle relative grassmanniane; di queste sono anche date varie rappresentazioni su spazi lineari, da cui sono tratte alcune eleganti conseguenze proiettive.

Il cap. XI sviluppa il formalismo del calcolo delle condizioni, che quindi applica a problemi di geometria numerativa, accennando anche rapidamente alle vedute teoriche più profonde con cui si giustificano tali applicazioni. Così sono studiate varie questioni numerative concernenti gli spazi subordinati di un iperspazio (specialmente le rette di S_3 e di S_4, ed altre riferentisi alle quadriche di S_3 ed alle loro forme degeneri, colle relative rappresentazioni in S_9.

Gli ultimi due capitoli trattano in grandi linee della geometria sopra una curva od una superficie. Il cap. XII espone le proprietà fondamentali delle serie lineari sulle curve, incluse quelle sulle serie jacobiane e canonica, fino al teorema di Riemann-Roch, con applicazioni alla teoria delle corrispondenze ed alla postulazione di una curva in un iperspazio. Il cap. XIII è dedicato allo studio dei sistemi lineari di curve sopra una superficie, dei caratteri effettivi e virtuali di quelli, e dei relativi sistemi covarianti; esso si occupa pure di varie altre questioni collegate a tale studio, concernenti le curve eccezionali, le singolarità delle superficie, ecc., e si chiude con un chiaro anche se sommario resoconto della teoria invariantiva, fino alle condizioni di Castelnuovo per la razionalità di una superficie.

BENIAMINO SEGRE

L. ROY: *Cours de Mécanique Rationelle* T. IV, *Problèmes et exercices suivi d'un appendice sur les Fusées.* Gauthier-Villars, Paris 1950, pp. XI + 276.

Questo quarto volume è, come afferma lo stesso A. nella prefazione, un necessario complemento ai tre precedenti volumi, dedicati quasi esclusivamente alla teoria.

I settantanove esercizi o problemi, tutti completamente svolti e commentati, sono raggruppati in quattro parti, ciascuna delle quali divisa in due o più capitoli: Cinematica; Punto materiale; Sistemi di punti materiali; Mezzi continui deformabili.

Qualche esercizio, ad es. uno sull'attrito di rotolamento, offre all'A. lo spunto per considerazioni, che costituiscono veri complementi alla teoria svolta nei primi tre volumi.

Molti esercizi sono accompagnati da applicazioni numeriche.

L'A. premette alla raccolta di esercizi alcuni consigli, diretti in particolare agli allievi del Corso di Meccanica Razionale dell'Università di Tolosa, sul modo di prepararsi agli esami e sul modo migliore per sostenere le varie prove. Se qualche consiglio, quale ad es. quello relativo al come si deve cancellare la lavagna, può sembrare superfluo, altri sono veramente interessanti sia dal punto di vista didattico che da quello culturale.

GIORGIO SESTINI

F. G. Richardson: *Dynamics of real fluids*, Edward and Co., (London, 1950), pp. 144, 21 sh.

Questo volumetto racchiude nelle sue poche pagine una chiara esposizione dei più importanti aspetti della dinamica dei fluidi, con particolare riguardo a quelli che più di recente sono stati sottoposti a ricerca. Esposizione semplice e che si affida quasi esclusivamente alla intuizione fisica del lettore, coadiuvata dai numerosi grafici e figure e dalle belle fotografie di cui è corredato il libro. Si intende bene quindi che non si tratta, nè vuol essere, di una esposizione completa delle proprietà dei fluidi, ma piuttosto di una introduzione allo studio delle teorie, anche le più complesse e tuttora in via di rigoglioso sviluppo, come quella del moto supersonico, che ne reggono la dinamica.

Nel Cap. I vengono esposte le teorie classiche sul moto dei fluidi. Il Cap. II è invece dedicato alla teoria dello strato limite, della scia vorticosa e del moto turbolento. Il Cap. III studia il moto dei fluidi compressibili a velocità vicine a quelle del suono. Il Cap. IV è dedicato al moto dei fluidi con un gradiente di temperatura, mentre il V si occupa del moto dei liquidi che possiedono una superficie libera. Gli ultimi due capitoli trattano infine delle sospensioni e dei mezzi in cui la materia è presente in più fasi, ed infine delle proprietà elastiche dei liquidi. Qui il volumetto più si discosta dalle trattazioni usuali dell'argomento, venendo ad accennare al punto, assai delicato, di contatto fra i fluidi ed i solidi plastico-viscosi. Anche per questo, se non fosse già per tutti i pregi della sua opera, dobbiamo essere grati all'A. di averci dato questo prezioso volumetto che inciterà, ne sono sicuro, chiunque lo legga ad approfondire le sue nozioni su questo ramo così interessante della fisica.

Tristano Manacorda