Mario Villa, Guido Vaona

Alcune osservazioni sulle curve caratteristiche delle trasformazioni cremoniane

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.2, p. 101–107.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_2_101_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1950.

SEZIONE SCIENTIFICA

PICCOLE NOTE

Alcune osservazioni sulle curve caratteristiche delle trasformazioni cremoniane.

Nota di MARIO VILLA e GUIDO VAONA (a Bologna).

Sunto. - *Si fanno alcune osservazioni relative al comportamento delle curve caratteristiche delle trasformazioni cremoniane rispetto alla curva Jacobiana.*

1. In una trasformazione puntuale fra due piani ha particolare interesse il sistema delle curve caratteristiche e la relativa curva discriminante (n. 2).

Se la trasformazione fra i due piani è cremoniana le componenti semplici della Jacobiana (in ciascuno dei piani) fanno parte della curva discriminante e sono integrali singolari (eventualmente impropri) dell'equazione differenziale delle curve caratteristiche (n. 3).

Un teorema analogo a quello del n. 3, relativo alle componenti semplici della Jacobiana, vale per una certa classe di componenti multiple (n. 4). Gli esempi del n. 5 provano l'esistenza effettiva dei casi precedentemente prospettati. Essi si riferiscono ad alcune trasformazioni cubiche per le quali vengono effettivamente determinate le curve caratteristiche.

Nel n. 6 si fanno alcune osservazioni e nel n. 7 si considerano certe trasformazioni puntuali per le quali l'equazione delle curve caratteristiche coincide con quella delle curve asintotiche di una superficie. Nello stesso n. 7 si considera una trasformazione cubica le cui curve caratteristiche non sono algebriche.

2. Sia data fra due piani complessi $\pi(x, y)$ e $\bar{\pi}(\bar{x}, \bar{y})$ una trasformazione puntuale T non degenere, rappresentata dalle equazioni

$$\bar{x} = f(x, y)$$
$$\bar{y} = \varphi(x, y),$$

dove f e φ sono funzioni olomorfe di x, y a Jacobiano non identicamente nullo nel campo di definizione.

Le tre rette caratteristiche di T uscenti da un punto P generico di π (o $\bar{\pi}$) inviluppano un sistema triplo ∞^1 di curve, le *curve caratteristiche* di T in π (o $\bar{\pi}$) [1]. L'equazione differenziale di queste curve è

$$(1) \quad F(x, y, y') = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} + y' \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + y' \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2y' \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y'^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2y' \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + y'^2 \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Il discriminante della (1), pensata come equazione algebrica in y', uguagliato a zero, rappresenta una curva γ (*curva discriminante*), che è il luogo dei punti del piano per cui due almeno delle tre rette caratteristiche coincidono. Per il teorema di DARBOUX-CAYLEY [2], in generale, γ è il *luogo delle cuspidi* delle curve caratteristiche.

In casi particolari la curva γ può possedere componenti che non sono luogo di cuspidi per le curve integrali. Queste componenti, com'è noto, possono essere di varia natura. Può fare parte di γ una curva che è *luogo di contatti*, tale che da ogni suo punto escono due curve integrali tangenti ad una stessa retta diversa dalla tangente alla curva stessa. Inoltre γ può possedere componenti che sono *integrali singolari* dell'equazione differenziale (in-

[1] Le curve caratteristiche di una trasformazione puntuale fra due piani sono già state considerate da BORŮVKA, *Sur les correspondances analytiques entre deux plans projectifs*, « Publ. de la Fac. de Sc. de Masaryk », nn. 72 e 85, (1926-27). Per le curve caratteristiche delle trasformazioni cremoniane si veda: M. VILLA, Comunicazione al II Congresso della Società Matematica Austriaca (Innsbruck, settembre 1949) e Comunicazione al Convegno di Ferrara (2 maggio 1950). Si veda anche E. BOMPIANI, *Tessuti di curve piane e corrispondenze fra piani*, « Rend. dell'Acc. dei Lincei », ser. VIII, vol. VI, pp. 7-12 (1949); M. VILLA e G. VAONA, *Varietà quasi-asintotiche a più indici e curve caratteristiche di una trasformazione puntuale*, « Rend. dell'Acc. dei Lincei », ser. VIII, vol. VIII, pp. 470-476 (1950).

[2] Si veda ad esempio: É. PICARD, *Traité d'Analyse*, T. III, 3ª ed., p. 48, Paris (1928).

viluppo di curve integrali). Possono pure esistere componenti di γ, che chiameremo *integrali singolari impropri*, che soddisfano alla definizione di integrale singolare ([3]) senza essere inviluppate dal sistema delle curve integrali ([4]).

3. Se la trasformazione fra i due piani è cremoniana si ha:

Le componenti semplici della Jacobiana di una trasformazione cremoniana fanno parte della curva discriminante e sono integrali singolari (eventualmente impropri) dell' equazione differenziale delle curve caratteristiche.

In ogni punto $P(x_0, y_0)$ semplice della Jacobiana di una trasformazione puntuale le tre rette che, per così dire, prendono il posto delle rette caratteristiche, ossia le tre rette di equazioni $y - y_0 = y'(x - x_0)$, con y' radice della (1), sono la *retta stazionaria* e le due *tangenti nodali* ([5]). Se la trasformazione è cremoniana in ogni punto semplice della Jacobiana la retta stazionaria e una delle due tangenti nodali coincidono colla tangente alla Jacobiana ([6]). Segue che le componenti semplici della Jacobiana fanno parte della curva discriminante ed inoltre che sono integrali singolari (eventualmente impropri) dell' equazione differenziale delle curve caratteristiche.

4. Le componenti multiple della Jacobiana di una trasformazione cremoniana possono distinguersi in due tipi: I) componenti in un punto generico delle quali le rette caratteristiche sono in-

([3]) Un elemento E_1 (punto e retta appartenentisi) dicesi *puntualmente singolare* per la (1) quando soddisfa alla (1) e alla $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$. Dicesi *integrale singolare* della (1) un qualsiasi inviluppo di una semplice infinità di elementi puntualmente singolari. Si veda G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, vol. II, 2ª ed., Bologna, Zanichelli, pp. 170-175 (1949); S. K. ZAREMBA, *Sur l'allure des integrales d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre dans le voiginage de l'intégrale singulière*, « Bull. del'Acad. Polonaise des Sc. et Lettres », sér. A, pp. 288-321 (1931).

([4]) Questi integrali entrano nell'integrale generale. Si veda: E. NEMETTI, *Sur la solution singulière de l'équation ordinaire du premier ordre*, « Bull. de la Soc. Phis.-Math. de Kazan », sér. III. vol. III, pp. 48-55 (1928).

([5]) Si veda: M. VILLA e G. VAONA, *Le trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo. I Intorno del 2º ordine*, « Rend. dell'Acc. dei Lincei », ser. VIII, vol. VI, pp. 184-188 (1949).

([6]) Si veda: M. VILLA, *Sulle trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo nel caso cremoniano*, « Rend. dell'Acc. dei Lincei », ser. VIII, vol. II, pp. 136-139 (1947).

determinate; II) componenti in un punto generico delle quali le rette caratteristiche *non* sono indeterminate.

Perchè una componente sia del I tipo occorre che siano indeterminate o la retta stazionaria o le tangenti nodali (o l'una e le altre insieme). Segue che sono del I tipo quelle curve fondamentali che sono componenti multiple per le curve della rete passanti per un loro punto (non base) oppure quelle curve fondamentali in un punto generico delle quali la curva della rete con punto multiplo ha punto triplo almeno.

Per le componenti multiple del II tipo si ha:

Le componenti multiple della Jacobiana di una trasformazione cremoniana, in un punto generico delle quali le rette caratteristiche non sono indeterminate, fanno parte della curva discriminante e sono integrali singolari dell'equazione differenziale delle curve caratteristiche.

Dall'esame dei casi in cui la Jacobiana di una rete ha punto doppio ([7]), risulta infatti che, affinchè una componente sia del II tipo, in un suo punto generico devono coincidere la tangente ad essa, la retta stazionaria e le due tangenti nodali. Segue l'asserto.

5. Gli esempi che ora considereremo proveranno l'esistenza di componenti della Jacobiana dei due tipi: integrali singolari (inviluppo delle curve caratteristiche) e integrali singolari impropri.

a) Consideriamo fra $\pi(x, y)$ e $\bar{\pi}(\bar{x}, \bar{y})$ la trasformazione cubica T_3 relativa alla rete omaloidica di cubiche di π avente i quattro punti base semplici infinitamente vicini al punto base doppio su un solo ramo lineare. Con opportuna scelta dei riferimenti proiettivi, le equazioni di T_3 si scrivono

$$\bar{x} = x, \qquad \bar{y} = \frac{1}{x^2 + y}.$$

I tre sistemi di curve caratteristiche in π sono costituiti dal fascio di rette di centro $A_2(0, 1, 0)$ (punto fondamentale doppio) e

([7]) Si veda: M. VILLA, *Sulle singolarità della Jacobiana di* r + 1 *ipersuperficie dello spazio ad* r *dimensioni*, « Memorie dell'Ist. Lombardo ». ser. III, vol, XIII, fasc. 4, (1931). Esclusi i punti base, la Jacobiana ha punto doppio se: 1° le curve della rete passanti per quel punto hanno tutte punto doppio (tangente stazionaria inderminata); 2° le curve della rete passanti per quel punto hanno ivi punto semplice ad eccezione di una che ha punto triplo (tangenti nodali indeterminate); 3° le curve della rete passanti per quel punto hanno ivi punto semplice ad eccezione di una che ha cuspide colla stessa tangente comune alle altre curve.

dalla famiglia di coniche di equazione

$$3x^2 + 4y - 4cx - 4c^2 = 0 \qquad (c \text{ parametro}).$$

La famiglia di coniche inviluppa la conica fondamentale $y + x^2 = 0$. che risulta pertanto *integrale singolare.* L'altra componente della Jacobiana (la retta impropria contata 4 volte) è invece *integrale singolare improprio*. Le curve caratteristiche in $\bar{\pi}$ sono le trasformate delle curve caratteristiche di π da T_3. Esse sono le rette del fascio di centro $\bar{A}_2(0, 1, 0)$ e le cubiche di equazione

$$\bar{x}^2\bar{y} + 4c\bar{x}\bar{y} + 4c^2\bar{y} - 4 = 0.$$

L'asse $\bar{y}$ è componente *semplice* della Jacobiana in $\bar{\pi}$ ed è integrale singolare improprio. La retta $\bar{A}_1\bar{A}_2$, che (contata 5 volte) costituisce assieme all'asse $\bar{y}$ la Jacobiana in $\bar{\pi}$, è pure integrale singolare improprio.

b) Sia data la trasformazione cubica relativa alla rete omaloidica di π avente i quattro punti base semplici infinitamente vicini su un ramo lineare, distinti però dal punto base doppio. Le equazioni della trasformazione si possono scrivere

$$\bar{x} = x, \qquad \bar{y} = \frac{x^2 y}{x^2 + y}.$$

Le curve caratteristiche in π sono le rette per $A_2(0, 1, 0)$ e le cubiche

$$y(1 - cx)^2 - 4cx^3 = 0 \qquad (c \text{ parametro}).$$

La conica fondamentale $y + x^2 = 0$ è inviluppata dalle curve caratteristiche ed è perciò un *integrale singolare,* mentre l'altra componente della Jacobiana (l'asse y contato 4 volte) è *integrale singolare improprio.* Gli stessi risultati si hanno per $\bar{\pi}$.

c) Consideriamo infine la trasformazione cubica generata dalla rete omaloidica avente tre punti base semplici infinitamente vicini al punto base doppio su un solo ramo lineare e l'ulteriore punto base semplice distinto. Le equazioni si scrivono

$$\bar{x} = x, \qquad \bar{y} = \frac{x}{y + x^2}.$$

Le curve caratteristiche in π sono, oltre le rette del fascio di centro A_2, le sestiche di equazione

$$(y + x^2)(1 - 9cy - 18cx^2)^2 = (y + 5x^2)(1 - 7cy - 8cx^2)^2.$$

Queste sestiche inviluppano la conica fondamentale $y + x^2 = 0$, mentre hanno cuspidi variabili sulla conica $y + 5x^2 = 0$, che fa parte della curva discriminante.

6. In un lavoro recente [8] abbiamo dimostrato che, data fra due spazi lineari S_r, S_r' una trasformazione puntuale T non degenere, se V_r è la varietà rappresentativa di T sulla V_{2r} di SEGRE, si ha:

Le curve di $\mathrm{V_r}$ *che rappresentano le coppie di curve caratteristiche di* T *sono tutte e sole le curve quasi-asintotiche* $\gamma_{1,2,3}$ *di* $(\mathrm{V_{2r}}, \mathrm{V_r})$.

Gli esempi riportati in quel lavoro (trasformazioni cremoniane quadratiche) danno luogo, come è ivi rilevato, a casi banali di curve quasi-asintotiche $\gamma_{1,2,3}$. Le trasformazioni cubiche considerate nel n. 5 forniscono invece esempi di curve caratteristiche a cui si collegano curve quasi-asintotiche $\gamma_{1,2,3}$ non banali.

7. In questo numero ci soffermeremo brevemente su una particolare classe di trasformazioni fra le quali rientrano quelle di DE JONQUIERES. Queste corrispondenze sono caratterizzate dalla seguente condizione:

In ciascuno dei due piani, uno dei tre sistemi di curve caratteristiche è un fascio di rette e la trasformazione subordina tra le rette caratteristiche dei due fasci una proiettività.

Con scelta opportuna dei riferimenti proiettivi nei due piani, una generica trasformazione del tipo indicato, si rappresenta colle equazioni

$$\bar{x} = x, \qquad \bar{y} = \varphi(x, y). \tag{2}$$

Le trasformazioni (2) comprendono, in particolare, quelle di DE JONQUIERES che si possono rappresentare con equazioni del tipo

$$\bar{x} = x, \qquad \bar{y} = \frac{y\Phi_{n-1} + \Phi_n}{y\Psi_{n-2} + \Psi_{n-1}} \tag{3}$$

dove Φ e Ψ sono polinomi in x di grado uguale all'indice.

[8] Si veda: M. VILLA e G. VAONA, op. cit. in [1]. In quel lavoro, estendendo la nozione di curva quasi-asintotica a due indici (BOMPIANI), si pone la seguente definizione: Date due varietà V_k, $V_m (k > m)$, tali che V_m appartenga a V_k, una curva γ di V_m si dirà *quasi-asintotica a tre indici* $\gamma_{p,q,r}$ di (V_k, V_m) quando in ogni suo punto lo spazio congiungente l'$S(p)$ osculatore a V_k, l'$S(q)$ osculatore a V_m e l'$S(r)$ osculatore ad essa $(p < q < r)$ ha dimensione minore del massimo corrispondente ai valori assegnati di k, m, p, q, r.

L'equazione differenziale dei due sistemi di curve caratteristiche della (2) residui al fascio di rette, è

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2y' \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y} + y'^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{4}$$

Ma la (4) è anche l'equazione differenziale delle proiezioni sul piano xy, dal punto improprio dell'asse z, delle asintotiche della superficie di equazione $z = \varphi(x, y)$. Nel caso in cui la trasformazione sia una generica trasformazione di DE JONQUIERES d'ordine n, la superficie corrispondente è una generica superficie razionale d'ordine n con due punti $(n-1)$-pli. Appare viceversa dalle (3) come, data una superficie razionale d'ordine n con due punti $(n-1)$-pli, si possa costruire una corrispondente trasformazione di DE JONQUIERES fra due piani passanti ciascuno per uno dei due punti $(n-1)$-pli.

Le curve caratteristiche delle trasformazioni cubiche considerate nel n. 5 sono algebriche.

Indicheremo ora un esempio di trasformazione cubica con curve caratteristiche trascendenti. Una trasformazione cubica T fra due piani π, $\bar{\pi}$, come si è osservato sopra, si può individuare mediante una superficie razionale cubica F con due punti doppi. Le curve caratteristiche di T sono costituite dalle proiezioni su π, $\bar{\pi}$ dai punti doppi, delle asintotiche di F e dai fasci di rette aventi centri nei punti doppi stessi. Basterà dunque trovare una F con curve asintotiche trascendenti. Un esempio assai semplice si ha considerando la superficie $xyz = 1$, cui è collegata la trasformazione $\bar{x} = x$, $\bar{y} = \frac{1}{xy}$. Le proiezioni delle asintotiche di tale superficie sul piano xy sono

$$y^{-\varepsilon_1} = \lambda_1 x, \qquad y^{-\varepsilon_2} = \lambda_2 x,$$

dove λ_1, λ_2 sono parametri ed ε_1, ε_2 sono le radici cubiche complesse dell'unità [9].

[9] Si veda É. GOURSAT. *Cours d'Analyse Mathématique*, t. I, p. 257, Paris (1902).