Bollettino
Unione Matematica Italiana

Roberto Conti

Sulla derivata dell'integrale

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.2, p. 128–133.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_2_128_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Sulla derivata dell'integrale.

Nota di ROBERTO CONTI (a Firenze).

Sunto. - *Si conoscono due condizioni* (*le* B) *e* C) *del n.* 1) *perchè in un punto* x *prefissato sia* $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = 0$; *una terza condizione* (*la* A) *del n.* 1) *viene qui stabilita e si mostra poi* (*nn.* 2, 3) *che la classe di funzioni cui essa si applica per un determinato punto* x *è una sottoclasse propria della classe delle funzioni che, in* x, *soddisfano insieme* B) e C). *Infine* (*n.* 4) *si rileva che* B) e C) *sono indipendenti l'una dall'altra.*

1. Sia $f(t)$ una funzione limitata e misurabile nell'intervallo $a \leq t \leq b$ e sia

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + \text{cost}$$

il suo integrale indefinito, nel senso di LEBESGUE. La presente breve ricerca ha per scopo principale di istituire un confronto tra alcune condizioni ognuna delle quali basta a far sì che in un dato punto x di (a, b) la derivata $F'(x)$ della F esista e sia nulla

$$F'(x) = 0. \tag{1}$$

Per semplificare, senza restrizioni sostanziali, considereremo la derivata destra in x, $F'_+(x)$ ed in luogo della (1), la

$$F'_+(x) = 0. \tag{2}$$

Affinchè la (2) si verifichi è sufficiente una delle tre condizioni seguenti:

A) - *La funzione* $\frac{f(t)}{t - x}$ *sia assolutamente integrabile per* $x \leq t \leq b$;

B) - *Esista finito il limite*

$$\lim_{\delta \to +0} \int_{x+\delta}^{b} \frac{f(t)}{t - x}\, dt.$$

C) - *La* f(t) *sia « approssimativamente infinitesima, a destra, nel punto* x », *il che sta a significare che l'insieme dei punti* $t \geq x$ *nei quali è*

$$|f(t)| < \sigma$$

ha in x *una densità eguale ad uno, comunque si scelga* $\sigma > 0$.

B) e C) possono considerarsi come sostanzialmente note. La dimostrazione della sufficienza di B) si trova in una Nota di THOMAE [1], sotto ipotesi, circa la natura della f, diverse dalle nostre, ma sussiste anche nel caso attuale. La sufficienza della C) si prova con lo stesso semplice procedimento tenuto da DENJOY per dimostrare il noto teorema [2] che afferma l'esistenza della $F'(x)$ in ogni punto x in cui la f è « approssimativamente continua » e l'uguaglianza della $F'(x)$ stessa con la $f(x)$.

La A) invece non sembra sia stata rilevata esplicitamente e la dimostrazione della sua sufficienza è immediata; basta osservare che dall'ipotesi segue che fissato un $\varepsilon > 0$ si può determinare un δ_0 tale che per $0 < \delta \leq \delta_0$ sia

$$\int_x^{x+\delta} \frac{|f(t)|}{t-x}\, dt < \varepsilon$$

e quindi, essendo $0 < t - x \leq \delta$

$$\frac{1}{\delta}\int_x^{x+\delta} |f(t)|\, dt < \varepsilon$$

ed a maggior ragione

$$\frac{1}{\delta}\left|\int_x^{x+\delta} f(t)dt\right| < \varepsilon$$

cioè la (2).

2. Per comodità di linguaggio indichiamo con A, B, C le classi di funzioni $f(t)$ che in un determinato x di (a, b) soddisfano le condizioni A), B), C) rispettivamente. Faremo vedere anzitutto che tra queste classi sussiste la relazione

$$A \leq BC \tag{3}$$

cioè che *ogni funzione soddisfacente la* A) *soddisfa anche la* B) *e la* C).

Per questo occorre e basta provare le

$$A \leq B, \qquad A \leq C \tag{3'}$$

[1] THOMAE, *Ueber die Differenzirbarkeit eines Integrales nach der obern Grenze*, « Nachr. Göttingen », n. 18, pp. 696-700, (1893).

[2] Ved. A. DENJOY, *Sur les fonctions derivées sommables*, « Bull. Soc. Math. de France », t, 43, pp. 161-248; (1915), p. 172, 178; ved. anche W. WILKOSZ, *Some properties of derivative functions*, « Fund. Math. », t. 2, pp. 145-154, (1921), p. 150.

di cui la prima è una relazione nota e la seconda discende dal seguente:

TEOREMA. – *Se* $\varphi(t)$ *è una funzione assolutamente integrabile per* $a \leq t \leq b$ *la funzione* $(t-x)\varphi(t)$ *risulta approssimativamente infinitesima per ogni* x *di* (a, b).

Si fissi infatti un punto x di (a, b) a piacere; scelto un $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, si potrà in corrispondenza di tale x determinare un $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ tale da aversi per $0 < \delta \leq \delta_0$

$$\int_x^{x+\delta} | \varphi(t) | \, dt < \varepsilon$$

e quindi anche, per $t > x$

$$\int_x^{x+\delta} \frac{1}{t-x} (t-x) | \varphi(t) | \, dt < \varepsilon$$

ed, essendo $0 < t - x \leq \delta$

$$\frac{1}{\delta} \int_x^{x+\delta} (t-x) | \varphi(t) | \, dt < \varepsilon. \tag{4}$$

Sia I_δ l'insieme dei punti t di $(x, x+\delta)$ in cui è

$$(t-x) | \varphi(t) | \geq \sqrt{\varepsilon} \tag{5}$$

e sia CI_δ l'insieme complementare di I_δ rispetto all'intervallo $(x, x+\delta)$.

In luogo della (4) si potrà scrivere

$$\frac{1}{\delta} \int_{I_\delta} (t-x) | \varphi(t) | \, dt + \frac{1}{\delta} \int_{CI_\delta} (t-x) | \varphi(t) \, dt < \varepsilon$$

e per la (5):

$$0 < \frac{1}{\delta} \sqrt{\varepsilon} \, m(I_\delta) + \frac{1}{\delta} \int_{CI_\delta} (t-x) | \varphi(t) | \, dt < \varepsilon$$

$m(I_\delta)$ indicando la misura, nel senso di LEBESGUE, di I_δ. A maggior ragione sarà dunque

$$0 \leq \frac{m(I_\delta)}{\delta} < \sqrt{\varepsilon}$$

e per l'arbitrarietà di ε segue che I_δ ha densità eguale a zero. quindi CI_δ densità eguale ad uno, in x. Analogamente si procede se $t < x$.

Se in particolare $\varphi(t) = \dfrac{f(t)}{t-x}$, $t \geq x$, resta provata la seconda delle (3') e quindi la (3).

3. Mostriamo ora, con un esempio, che *la classe* A *è una sottoclasse propria della classe* BC, in simboli

$$(3'') \qquad A < BC$$

Siano $\{a_n\}$ ed $\{\varepsilon_n\}$ due successioni di numeri positivi di cui la prima converga a zero, decrescendo, e si abbia inoltre

$$(6') \qquad a_{n+1}(1+\varepsilon_{n+1}) < a_n$$

per $n = 1, 2, 3, \dots$ e

$$(6'') \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}\varepsilon_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n\varepsilon_n}{a_n(1+\varepsilon_n) - a_{n+1}(1+\varepsilon_{n+1})} = 0.$$

Proveremo che in tali condizioni l'insieme I dei punti t tali che

$$I:\ a_n < t < a_n(1+\varepsilon_n); \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

ha densità nulla nel punto $t = 0$. Detta $\psi(t)$ la funzione « caratteristica » di I (cioè eguale ad uno se t appartiene ad I, eguale a zero altrove) si tratta di provare che è

$$\lim_{x\to+0} \frac{1}{x}\int_0^x \psi(t)dt = 0$$

ovvero, poichè

$$\int_0^x \psi(t)dt = \int_0^{a_1(1+\varepsilon_1)} \psi(t)dt - \int_x^{a_1(1+\varepsilon_1)} \psi(t)dt = \sum_1^\infty{}_n\, a_n\varepsilon_n - \int_x^{a_1(1+\varepsilon_1)} \psi(t)dt$$

dovremo provare che è

$$(7) \qquad \lim_{x\to+0} \frac{1}{x}\left[\sum_1^\infty{}_n a_n\varepsilon_n - \int_x^{\alpha_1(1+\varepsilon_1)} \psi(t)dt\right] = 0.$$

La grafica della $\int_x^{a_1(1+\varepsilon_1)} \psi(t)dt$ è una spezzata s, a lati rettilinei, con i vertici nei punti

$$(a(1_1+\varepsilon_1),\ 0);\quad (a_1,\ a_1\varepsilon_1);\quad (a_2(1+\varepsilon_2),\ a_1\varepsilon_1),\quad (a_2,\ a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2);\ \dots$$
$$\dots;\quad (a_n(1+\varepsilon_n),\ \sum_1^{n-1}{}_\nu\, a_\nu\varepsilon_\nu),\quad (a_n,\ \sum_1^{n}{}_\nu\, a_\nu\varepsilon_\nu);\ \dots$$

di cui il 1°, 3°, 5°, ... sono altrettanti minimi (il 2°, 4°, 6°, ... massimi). La spezzata s' che ha per 1°. 2°, 3°, ... vertice rispettivamente il 1°, 3°, 5ª, ... sta dunque tutta al di sotto di s e si vede subito che la seconda delle (6'') esprime il fatto che il coefficiente angolare del generico lato di s' tende a zero per $n\to\infty$. Analogamente la prima delle (6'') indica la tendenza a zero, per $n\to\infty$, del coefficiente angolare del generico lato di una seconda spezzata s'', tutta al di sopra di s, che ha per 1°, 2°, 3°, ... vertice il 2°, 4°, 6°, ... vertice di s rispettivamente. Dunque il coefficiente angolare della retta che unisce il punto $(0, \Sigma_n a_n\varepsilon_n)$ col punto $(x, \int_x^{a_1(1+\varepsilon_1)} \psi(t)dt)$ al tendere di x a zero (e quindi per $n \to \infty$) tende anch'esso a zero, ciò che prova la (7) e quindi l'asserto.

Ne segue che se $f(t)$ è una funzione limitata, eguale a zero nell'insieme

$$CI: \ a_{n+1}(1+\varepsilon_{n+1}) \leq t \leq a_n; \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

e definita in modo qualsiasi in I e per $t = 0$, essa risulterà approssimativamente infinitesima, a destra, nel punto zero. Particolarizziamo ora la $f(t)$ definendola in modo opportuno nei punti di I; si ponga ad es. $f(t) = 1$ in tutti i punti di $(a_1, a_1(1+\varepsilon_1))$, $f(t) = -1$ in tutti i punti di $(a_2, a_2(1+\varepsilon_2))$ e così via, seguitando alternativamente con $+1$ e -1 negli intervalli $(a_n, a_n(1+\varepsilon_n))$ di cui si compone I. Si vede subito allora che l'integrale

$$\int_\delta^{a_1(1+\varepsilon_1)} \frac{f(t)}{t}\, dt$$

oscilla, per $\delta \to 0$, tra infiniti massimi e minimi; la successione di tali valori estremi è data da

$$\log(1+\varepsilon_1), \quad \log\frac{(1+\varepsilon_1)}{(1+\varepsilon_2)}, \quad \log\frac{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3)}{(1+\varepsilon_2)}, \ldots. \tag{8}$$

Anche l'integrale

$$\int_\delta^{a_1(1+\varepsilon_1)} \frac{|f(t)|}{t}\, dt$$

oscilla, per $\delta \to +0$, tra infiniti massimi e minimi dati da

$$\log(1+\varepsilon_1), \quad \log(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2), \quad \log(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3), \ldots. \tag{8'}$$

Poichè la successione $\{\varepsilon_n\}$ può scegliersi in modo che, soddisfatte le (6') e (6''), la (8') diverga mentre la (8) converge (ad es. per $a_n = 2^{-n}$, $\varepsilon_n = n^{-1}$) segue l'esistenza di funzioni soddisfacenti la B) e la C), ma non la A), cioè la (3'').

4. Altre relazioni tra B e C sono le

$$BC < B, \qquad BC < C \tag{9}$$

cioè *la classe* BC *è contenuta propriamente sia in* B *che in* C.

Entrambe si possono provare con facili esempi; tra i quali ci limitiamo ad indicare, per la prima delle (9) quello della funzione

$$f_1(t) = \cos\frac{1}{t}, \qquad 0 < t \leq 1; \qquad f_1(0) = 0$$

e per la seconda quello della

$$f_2(t) = (\log t^{-2})^{-1/2} \operatorname{sen} (\log t^{-2})^{1/2}, \quad 0 < t \leq 1; \qquad f_2(0) = 0.$$

Infatti la $f_1(t)$ verifica, per $t = 0$, la condizione B), come ha mostrato lo stesso THOMAE (3), ma non è approssimativamente infinitesima (4); la $f_2(t)$ è invece infinitesima, addirittura, per $t = 0$, ma non soddisfa la B) essendo

$$\int_{\delta}^{1} \frac{f_2(t)}{t}\, dt = 1 - \cos (\log \delta^{-2})^{1/2}; \qquad 0 < \delta \leq 1$$

come è stato rilevato da PRASAD (5).