Bollettino Unione Matematica Italiana

Giuseppe Laureana

Eliminante nodale

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.2, p. 133–139.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_2_133_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1950.

Eliminante nodale.

Nota di GIUSEPPE LAUREANA (a Catanzaro).

Sunto. *Siano date* m + 1 *forme in più sistemi di variabili omogenee e in* r *sistemi di parametri omogenei nel caso particolare che i gradi delle date forme negli* r *sistemi di parametri non variino al variare della forma. Eliminando i parametri, si ottiene l'*eliminante nodale, *i cui caratteri si determinano in questa Nota.*

CORRADO SEGRE ha per il primo introdotto la varietà definita dall'annullare tutti i minori di dato ordine di una data matrice di forme in un solo sistema di variabili omogenee (Cfr. *Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice*, « Rend. Acc. Lincei », 12, 1903). Il SEGRE apre nuove vedute nell'eliminazione algebrica; si può considerare con CAYLEY come il precursore della teoria degli eliminanti.

Alla Scuola di CAYLEY appartengono le classiche *Leçons d'Algèbre supérieure di* G. SALMON, nelle quali si tiene in parte conto

(3) Cfr. J. THOMAE, loc. cit., p. 698.

(4) Cfr. A. DENJOY, loc. cit., p. 178.

(5) Cfr. G. PRASAD, *On the differentiability of the integral function*, « Journal für Math. », Bd. 160, pp. 100-110, (1929), p. 101. In questo lavoro si trova uno studio completo, importante specialmente per le applicazioni alle serie di FOURIER, della derivabilità di F nell'ipotesi di una $f(t)$ della forma $\chi(t) \cos \psi(t)$. Altri criteri, sempre per f di forme particolari, si trovano nella Nota dello stesso A.: *On the differentiability of a certain type of integral function.* « Bull. Calcutta Math. Soc. », v. 18, pp. 77-86, (1927).

dell'importante Memoria di S. ROBERTS, *Sur l'ordre des conditions de la coexistence des équations algébriques à plusieurs variables*, « Journ. für Math. », 67, 1867.

Come osserva il SEGRE, nelle sue classiche lezioni di Geometria superiore, la Memoria di ROBERTS passa inosservata, avendo vari Autori ripresa la teoria delle varietà rappresentate per mezzo di una matrice nulla di forme, senza citare il ROBERTS.

KRONECKER (¹), MOLK (²), KÖNIG (³) si occupano della effettiva eliminazione di parametri e di variabili tra più equazioni algebriche: ricerca di carattere teorico che presenta talora difficoltà insormontabili in casi pratici.

Come interpretazioni geometriche delle forme in più sistemi di variabili omogenee si possono considerare le corrispondenze duplo-proiettive del CREMONA, le reciprocità di SEGRE tra spazi di diversa dimensione e le plurilinearità del DE PAOLIS (⁴). Il CLEBSCH introduce le forme in più sistemi di variabili per mezzo dell'operazione di polare, ma si ha l'ente particolare *connesso puntuale tra spazi della stessa dimensione*.

In questa Nota si considerano *connessi puntuali* tra t spazi di diversa dimensione e s'introducono nel connesso uno o più sistemi di parametri omogenei, pervenendo all'ente *biconnesso*, ossia connesso tra spazi puntuali e spazi parametrici.

Eliminando i parametri si ottiene l'ente eliminante, i cui caratteri dipendono dalla trasformazione, secondo il metodo del GIAMBELLI (⁵), di prodotti di combinazioni lineari di condizioni semplici imposte a gruppi di punti d'un biconnesso.

In questa Nota si tratta l'*eliminante nodale* definito dall'elimi-

(¹) *Grundzüge einer arithmetischen Theorie...*, (« Jour. für Math. », 92, 1881).

(²) *Sur une notion qui comprend celle de la divisibilitè*, (« Acta Mathem ». 6, 1885).

(³) *Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Grössen*, (Leipzig, 1903).

(⁴) Fondamenti per una teoria ancor più generale delle plurilineacità trovansi nelle Lezioni di F. SEVERI, *Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche nelle varietà algebriche*. (Roma, Cremonese, 1942), pag. 163.

(⁵) Dalle « Lezioni di Geometria Superiore dell'Università di Messina » e dalle seguenti Note della « Acc. Peloritana di Messina »: *Estensione del concetto di corrispondenza algebrica come operazione geometrica negli iperspazi*, 1930. *Estensione del concetto di risultante*, 1931. *Sistemi sommabili, di equazioni algebriche*, 1935. *Una identità nella teoria dei moduli di forme algebriche*, 1935.

nazione dei parametri appartenenti a sistemi di equazioni, ottenute dall'annullare forme contenenti più sistemi di variabili omogenee e più sistemi di parametri omogenei, nel caso particolare delle forme tutte con gli stessi gradi nei sistemi di parametri.

§ 1. **Connessi puntuali tra più spazi.** – Il connesso puntuale tra più spazi è l'ente geometrico interpretazione dell'annullamento di forme in più sistemi di variabili omogenee.

Sia f una forma

$$\begin{array}{llll} \text{di grado } q_1 & \text{nelle} & \text{variabili} & x_{10}, x_{11}, \dots, x_{1d_1}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{»} \quad \text{»} \quad q_t & \text{»} & \text{»} & x_{t0}, x_{t1}, \dots, x_{td_t}. \end{array}$$

L'equazione $f=0$ definisce un connesso puntuale $K(d_j; 0)_t$ tra i punti $P_1, \dots, P_t$ appartenenti ai rispettivi spazi $[d_1], \dots, [d_t]$ di caretteri $q_1, \dots, q_t$. Il connesso si dice di specie t; è un sistema ∞^{d-1} di gruppi g_t di t punti $P_1, \dots, P_t$ con $d = d_1 + d_2 + \dots + d_t$; d è l'indice d'immersione del connesso.

Se è nulla qualcuna delle $q_1, \dots, q_t$ il connesso si dice degenere; se sono nulle tutte le $q_1, \dots, q_t$ eccetto quella d'indice j, il connesso si dice elementare d'indice j; l'indice può essere 1, 2, ..., t.

L'intersezione di più connessi puntuali, se non è composta di parti di diversa dimensione, si dice *Clebschiano puntuale*. Il Clebschiano si dice di dimensione ρ, se è formato da ∞^{ρ} gruppi g_t di t punti $P_1, \dots, P_t$, appartenenti ai rispettivi spazi $[d_1], \dots, [d_t]$.

La varietà di dimensione ρ è stata chiamata dal GIAMBELLI varietà-base, se è completa intersezione di $d-\rho$ ipersuperficie, essendo $[d]$ lo spazio fondamentale. In modo analogo si definisce *Clebschiano-base* un Clebschiano puntuale di dimensione ρ, completa intersezione di $d-\rho$ connessi puntuali tra più spazi.

§ 2. **Forme in più sistemi di variabili omogenee e in uno o più sistemi di parametri omogenei. Biconnessi.** – La forma f, il cui annullamento definisce un connesso puntuale $K(d_j; 0)_t$, sia pure forma in un sistema di parametri omogenei o in più sistemi di parametri omogenei.

Nel 1° caso si denotino con $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ i parametri omogenei del sistema; con $\varphi(s; \lambda)$ la forma di grado s nelle $\lambda_0, \dots, \lambda_n$.

Nel 2° caso si abbiano r sistemi

$$\lambda_{k0}, \lambda_{k1} \dots, \lambda_{kn_k} \qquad (k = 1, 2, \dots, r)$$

di parametri; si denoti con $\varphi(s_1, \dots, s_r; \lambda)$ la forma di grado s_k nelle

$$\lambda_{k0}, \lambda_{k1}, \dots, \lambda_{kn_k}.$$

Queste forme $\varphi(s;\lambda)$, $\varphi(s_1,\dots,s_r;\lambda)$ sono pure forme nelle

$$x_{j0},\ x_{j1},\dots,\ x_{jd_j} \qquad (j=1,\ 2,\dots,\ t).$$

Posto nel 1° caso $\delta=n$, nel 2° caso $\delta=n_1+\dots+n_r$, si chiami δ *indice di estensione* dei parametri.

Sia Ψ una forma

nel 1° caso nei soli parametri $\lambda_0,\dots,\lambda_n$,
nel 2° caso sia nei parametri $\lambda_{10},\dots\lambda_{1n1},\dots$,
sia nei parametri $\lambda_{r0},\dots,\lambda_{rn_r}$.

L'equazione $\Psi=0$ definisce nel 1° caso una ipersuperficie parametrica, con $[n]$ spazio parametrico nel 2° un connesso parametrico $\Lambda(n_k;\ O)$, tra i punti $L_1,\dots,L_r$ dei rispettivi spazi $[n_1],\dots,[n_r]$.

L'equazione

$$\varphi(s_1,\dots,s_r;\lambda)=0$$

definisce invece un connesso, da chiamarsi *biconnesso* tra i punti $L_1,\dots,L_r,P_1,\dots,P_t$.

§ 3. Eliminante nodale. – Sia

$$\varphi_u(s_1,\dots,s_r;\lambda) \qquad (u=0,\ 1,\dots,\ m;\ m\geq\delta$$

una forma di grado

q_{u1} nelle variabili $x_{10},\dots,x_{1d1}$,
. . . .
q_{ut} » » $x_{t0},\dots,x_{tdt}$,
s_k nei parametri $\lambda_{k0},\lambda_{k1},\dots,\lambda_{ku_k}$ $(k=1,\ 2,\dots,\ r)$.

Sia δ l'indice di estensione dei parametri, per cui il sistema T_δ di tutti i parametri

$$\lambda_{k0},\ \lambda_{k1},\dots,\ \lambda_{kn_h} \qquad (k=1,\ 2,\dots,\ r)$$

è ∞^δ in senso essenziale. Sia T_δ' la totalità dei parametri, per cui l'intersezione dei connessi

$$\varphi_0(s_1,\dots,s_r;\lambda)=0,\dots,\ \varphi_m(s_1,\dots,s_r;\lambda)=0$$

è un Clebschiano-base di dimensione

$$d_1+d_2+\dots+d_t-\delta;$$

sia T_δ'' la totalità residua $T_\delta-T_\delta'$, ossia la totalità dei parametri

$$\lambda_{k0},\ \lambda_{k1}\dots,\ \lambda_{kn_h} \qquad (k=1,\ 2,\dots,\ r)$$

per cui la detta intersezione di connessi non è un Clebschiano-base di dimensione

$$d_1+d_2+\dots+d_t-\delta.$$

Per ipotesi la totalità T_δ' sia una *parte* di T_δ, ossia T_δ è in senso essenziale una totalità ∞^δ di parametri, mentre T_δ'' è $\infty^{\delta'}$ con $\delta' < \delta$.

Si denoti con $E_{m,\delta}$ l'eliminante dedotto dall'eliminazione dei parametri

$$\lambda_{k0}, \lambda_{k1}, \dots, \lambda_{kn_k} \qquad (k = 1, 2, \dots, r)$$

dal sistema di equazioni

$$\varphi_u(s_1, \dots, s_r; \lambda) = 0 \qquad (u = 0, 1, \dots, m)$$

nell'ipotesi dei parametri appartenenti alla totalità T_δ'.

Seguendo il GIAMBELLI si chiama $E_{m,\delta}$ *eliminante nodale.*

Si denoti con $\Theta(r; t)$ l'ente formato dagli r punti $L_1, \dots, L_r$ del connesso parametrico $\Lambda(n_k; 0)_r$ e dai t punti $P_1, \dots, P_t$ del connesso puntuale $K(d_j; 0)_t$, per cui la somma $\Lambda(n_k; 0)_r + K(d_j; 0)_t$ denota il biconesso d'immersione dell'ente $\Theta(r; t)$.

Si chiamino

$\mu_k (k = 1, 2, \dots, r)$ la condizione semplice imposta a $\Theta(r; t)$ di avere il punto L_k giacente in un dato iperpiano di $[n_k]$,

$\sigma_j (j = 1, 2, \dots, t)$ la condizione semplice imposta a $\Theta(r; t)$ di avere il punto P_j giacente in un dato iperpiano di $[d_j]$.

All'equazione

$$\varphi_u(s_1, \dots, s_r; \lambda) = 0 \qquad (u = 0, 1, \dots, m)$$

corrisponde la combinazione lineare di condizioni

$$s_1\mu_1 + \dots + s_r\mu_r + q_{u1}\sigma_1 + \dots + q_{ut}\sigma_t.$$

I caratteri dell'eliminante nodale $E_{m,\delta}$ dipendono dal prodotto

$$\prod_{u=0}^{u=m} (s_1\mu_1 + \dots + s_r\mu_r + q_{u1}\sigma_1 + \dots + q_{ut}\sigma_t).$$

Si imponga all'ente $\Theta(r; t)$ di avere

il punto P_1 appartenente ad un dato spazio $[a_1]$

. . . .

» » P_t » » » » » $[a_t]$,

con

$$a_1 + \dots + a_t = m - \delta + 1.$$

Sia $v_0, v_1, \dots, v_{m-\delta}$ una combinazione semplice di classe $m - \delta + 1$ degli interi $0, 1, \dots, m$; con

$$G(a_1, \dots, a_t; v_0, v_1, \dots, v_{m-\delta})$$

si denoti il coefficiente di $\sigma_1^{a_1} \sigma_t^{a_t}$ nel prodotto

$$\prod_{u=v_0}^{u=v_{m-\delta}} (s_1\mu_1 + \dots + s_r\mu_r + q_{u1}\sigma_1 + \dots + q_{ut}\sigma_t).$$

Il coefficiente di

$$\mu_1^{n_1} \dots \mu_r^{n_r} \sigma_1^{a_1} \dots \sigma_t^{a_t}$$

nel prodotto

$$\prod_{u=0}^{u=m} (s_1\mu_1 + \dots + s_r\mu_r + q_{u1}\sigma_1 + \dots + q_{ut}\sigma_t)$$

con la restrizione che $\sigma_1, \dots, \sigma_t$ appartengano alla combinazione lineare di condizioni

$$s_1\mu_1 + \dots + s_r\mu_r + q_{u1}\sigma_1 + \dots + q_{ut}\sigma_t \qquad (u = v_0, v_1 \dots, v_{m} \ \delta)$$

è dato dal prodotto di

$$s_1^{n_1} \dots s_r^{n_r} \frac{\delta!}{n_1! \dots n_r!}$$

per il coefficiente

$$G(a_1, \dots, a_t, v_0, v_1, \dots, v_{m-\delta}).$$

Si osservi: detto $u_1, \dots, u_\delta$ ciò che diventa la permutazione $0, 1, , \dots, m$, quando si tolgano gli interi $v_0, v_1, \dots, v_{m-\delta}$, il coefficiente di $\mu_1^{n_1} \dots \mu_r^{n_r}$ nel prodotto delle combinazioni lineari di condizioni

$$s_1\mu_1 + \dots + s_r\mu_r + q_{u1}\sigma_1 + \dots + q_{ut}\sigma_t \quad (u = u_1, \dots, u_\delta)$$

è il prodotto di $s_1^{n_1} \dots s_r^{n_r}$ per il coefficiente polinomiale

$$\frac{\delta!}{n_1! \dots n_r!}.$$

Detto $L(a_j)$ $(j = 1, 2, \dots, t)$ il sistema di $d_j - a_j$ equazioni lineari nelle sole $x_{j0}, \dots, x_{jdj}$, si chiami $L(a_1, \dots a_t)$ il sistema somma $L(a_1) + \dots + L(a_t)$, ossia il sistema delle $d_1 + \dots + d_t - a_1 - \dots - a_t$ equazioni lineari appartenenti ai sistemi addendi $L(a_1), \dots, L(a_t)$. È lecita *l'ipotesi di poter scegliere le equazioni* di $L(a_1, \dots, a_t)$ in modo che eliminando i parametri

$$\lambda_{k0}, \lambda_{k1}, \dots, \lambda_{kn_k} \qquad (k = 1, 2, \dots, r)$$

si abbia un numero finito, da indicarsi con $K(a_1, \dots, a_t)$, di soluzioni nelle

$$x_{j0}\ x_{j1}, \dots, x_{jdj} \qquad (j = 1, 2, \dots, t);$$

$K(a_1, \dots, a_t)$ sono i caratteri dell'eliminante $E_{m,\delta}$.

Si conclude:

« Il carattere $K(a_1, \dots, a_t)$ dell'eliminante nodale $E_{m,\delta}$ è dato dal prodotto del coefficiente polinomiale

$$\frac{\delta!}{n_1! \dots n_r!}$$

per $s_1^{n_1} \dots s_r^{n_r}$ e per la somma

$$\Sigma_{v_0 \dots v_{m-\delta}} G(a_1, \dots, a_t; v_0, v_1, \dots, v_{m-\delta}),$$

con la sommatoria estesa a tutte le combinazioni $v_0, v_1, \dots, v_{m-\delta}$ semplici di classe $m - \delta + 1$ degli interi $0, 1, \dots, m$ ».