BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIULIANA BERTI

Il problema di Saint-Venant nell'elasticità ereditaria

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.2, p. 139–144.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_2_139_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1950.

Il problema di Saint-Venant nell'elasticità ereditaria.

Nota di GIULIANA BERTI (a Bologna).

Sunto. - *Si studia, nel caso dell'elasticità ereditaria, il problema di* SAINT-VENANT *per i cilindri.*

1. Circa quarant'anni fà il VOLTERRA iniziò i suoi studi sull'elasticità ereditaria ottenendo, com'è noto, risultati di fondamentale importanza.

Le ricerche del VOLTERRA ebbero largo seguito: non mi risulta però sia stato trattato, nel caso dell'elasticità ereditaria, il classico problema di SAINT-VENANT per i cilindri. Oggetto di questa nota sarà appunto la soluzione del predetto problema, escluso però il caso del taglio, di cui si dirà forse in altro lavoro.

2. La soluzione del problema di SAINT-VENANT (escluso il taglio) si presenta abbastanza facile, perchè non richiede la soluzione di equazioni integro-differenziali, ma solo la teoria delle equazioni integrali del tipo di VOLTERRA. Per rendere più rapida la nostra esposizione ci serviremo di qualche proprietà di alcuni operatori già introdotti dal VOLTERRA, di cui si è parlato in una nota precedente (1).

3. Nell'elasticità ereditaria valgono le stesse equazioni dell'elasticità ordinaria; ma l'omografia degli sforzi $\beta(t)$ all'istante t dipende non solo dai valori $\alpha(t)$ dell'omografia di deformazione all'istante t, ma anche dai valori $\alpha(\tau)$ assunti da questa omografia per gli istanti precedenti t. Ammesso, come fa il VOLTERRA (2),

(1) G. BERTI: " *Su qualche proprietà di alcuni operatori introdotti dal Volterra* ,, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana.

(2) VOLTERRA: " *Leçon sur les fonctions de lignes* ,, cap. VIII, § 1, Paris, Gauthier-Villars 1913.

l'ereditarietà lineare e i corpi isotropi, la relazione fra queste due omografie diventa:

$$\beta(t) = lI_1(\alpha) + \int_0^t h(t, \tau)I_1[\alpha(\tau)]d\tau + 2mD\alpha + 2\int_0^t \mu(t, \tau)D\alpha(\tau)d\tau$$

dove l ed m sono le costanti di LAME, $h(t, \tau)$ e $\mu(t, \tau)$ due funzioni di t e τ dette coefficienti di ereditarietà.

Introducendo gli operatori L ed M definiti rispettivamente dai numeri l ed m e dalle funzioni $h(t, \tau)$, $\mu(t, \tau)$ cioè tali che se $f(t)$ è una funzione continua:

$$Lf(t) = lf(t) + \int_0^t h(t, \tau)f(\tau)d\tau \qquad Mf(t) = mf(t) + \int_0^t \mu(t, \tau)f(\tau)d\tau$$

si ha:

(1) $$\beta(t) = LI_1[\alpha(t)] + 2MD\alpha(t)$$

4. Tornando alla questione proposta, cerchiamo di adattare al nostro caso le formule solite del problema non ereditario. Consideriamo un cilindro di sezione S, lunghezza h, con una sezione estrema vincolata; poniamo l'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali x, y, z nel suo baricentro, gli assi x e y secondo gli assi principali d'inerzia di tale sezione e l'asse z diretto verso l'interno del cilindro. Indichiamo poi con u, v, w le componenti dello spostamento segli assi x, y, z.

Cominciamo con trattare estensione semplice, cioè supponiamo le forze sulla base libera, paralleli all'asse del cilindro, distribuite uniformemente e con risultato $F(t)$. Poniamo:

(2) $$u = xb(t) \qquad v = yb(t) \qquad w = zg(t)$$

dove $b(t)$ e $g(t)$ sono funzioni da determinarsi. Le componenti ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}, dell'omografia di deformazione $D\alpha$ risultano:

$$\varepsilon_x = b(t) \quad \varepsilon_y = b(t) \quad \varepsilon_z = g(t) \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

Inoltre:

$$I_1(\alpha) = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 2b(t) + g(t)$$

Abbiamo così, le componenti σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} dell'omografia β, le espressioni:

$$\sigma_x = \sigma_y = 2(L + M)b(t) + Lg(t)$$

$$\sigma_z = 2Mg(t) + Lg(t) + 2Lb(t)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Ora scegliamo $b(t)$ in modo che s a $\sigma_x = \sigma_y = 0$: si soddisfa così alle condizioni di equilibrio sulla superficie laterale del cilindro.

Avremo:

$$b(t) = -\frac{(L+M)^{-1}}{2} Lg(t) \tag{3}$$

Da cui:

$$\sigma_z = [2M + L - L(L+M)^{-1}L]g(t)$$

L'omografia β, essendo costante rispetto alle coordinate, soddisfa certamente all'equazione indefinita dell'equilibrio dei corpi elastici; inoltre sono soddisfatte le condizioni di vincolo nell'origine. Cioè nell'origine stessa:

$$u = v = w = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

Le (2) (3) rappresentano allora la soluzione, del nostro problema, qualora σ_z valga $\frac{F(t)}{S}$, cioè sia:

$$g(t) = [2M + L - L(L+M)^{-1}L]^{-1} \frac{F(t)}{S}$$

Ora, nel caso non ereditario l'operatore che compare nella espressione di σ_z si riduce al modulo di elasticità; mentre l'operatore $-\frac{(L+M)^{-1}}{2}$ che compare nella (3) corrisponde al modulo di POISSON. Indicheremo questi due operatori così:

$$E = [ZM + L - L(L+M)^{-1}L]$$

$$K = -\frac{(L+M)^{-1}}{2} L$$

Quindi:

$$u = xKE^{-1}\frac{F(t)}{S} \qquad v = yKE^{-1}\frac{F(t)}{S} \qquad w = ZE^{-1}\frac{F(t)}{S}$$

Queste formule risolvono il problema di SAINT-VENANT nel caso della estensione. Da esse si possono ricavare, in base all'esperienza, E e K.

5. Passiamo allo studio della flessione. Scriviamo, sempre ricordando il caso non ereditario, per le componenti dello spostamento le espressioni:

$$u = xya(t) \qquad v = (y^2 - x^2)\frac{a(t)}{2} = z^2\frac{n(t)}{2} \qquad w = yzn(t) \tag{4}$$

dove $a(t)$, $n(t)$ sono funzioni da determinarsi mediante il momento della coppia che produce la flessione. Queste formule soddisfano intanto, come subito si verifica alle condizioni di vincolo nell'origine. Le componenti dell'omografia di deformazione $D\alpha$ sono:

$$\varepsilon_x = ya(t) \quad \varepsilon_y = ya(t) \quad \varepsilon_z = yn(t) \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

Inoltre:

$$I_1(\alpha) = 2ya(t) + yn(t)$$

Abbiamo così per le componenti di β le espressioni:

$$\sigma_x = \sigma_y = 2y(M + L)a(t) + yLn(t)$$

$$\sigma_z = 2yMn(t) = 2yLa(l) + yLn(t)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Ora scegliamo $a(t)$ in modo da soddisfare alle condizioni di equilibrio sulla superficie laterale del cilindro; cioè in modo che:

$$\sigma_x = \sigma_y = 0$$

$$a(t) = -\frac{1}{2}(M + L)^{-1}Ln(t) = Kn(\mathrm{t})$$

Da cui:

$$\sigma_z = y[2M + L - L(M + L)^{-1}L]n(t) = yEn(t)$$

Come nel caso non ereditario si ha subito che β soddisfa alle condizioni di equilibrio e che le forze applicate su un elemento di base non vincolata debbono valere $yEn(t)$, sicchè queste forze hanno risultante nullo ed equivalgono ad una coppia con momento diretto secondo l'asse delle x e di intensità π tale che:

$$\pi(t) = \int_S y^2 En(t) dS = En(t)I$$

qualora I indichi il momento d'inerzia della base S rispetto all'asse x. Si ha così:

$$n(t) = \frac{1}{I}E^{-1}\pi(t) \qquad a(t) = \frac{K}{I}E^{-1}\pi(t)$$

Con queste formule e le (4) si esprimono gli spostamenti nel caso della flessione, qualora si conoscano gli operatori K ed E, e la coppia $\pi(t)$ che produce la flessione.

6. Passiamo, da ultimo, alla torsione. Scriviamo in questo caso, per le componenti dello spostamento le espressioni:

(5) $\quad u = z(y + a)r(t) \quad v = -z(x - b)r(t) \quad w = [\psi(x, y) - ax - by]r(t)$

dove $r(t)$ è una funzione che rappresenta l'angolo di torsione, e che si determinerà mediante il momento della coppia che produce la torsione; $\psi(x, y)$ è la stessa funzione che considera nel caso non-ereditario, armonica e nulla nell'origine e tale che sul contorno S della sezione del cilindro fatta col piano xy sia:

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \delta x - \varepsilon y$$

essendo δ ed ε i coseni direttori della normale ad S; a e b valgono rispettivamente $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ e $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ calcolate nell'origine. Sono perciò soddisfatte le condizioni di vincolo in questo punto. Le componenti dell'omografia di deformazione $D\alpha$ valgono:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0$$

$$\gamma_{xz} = \frac{r(t)}{2}\left(y + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \qquad \gamma_{yz} = \frac{r(t)}{2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - x\right)$$

Inoltre:

$$T, (\alpha) = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$$

Abbiamo così per le componenti dell'omografia β le espressioni:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \qquad \tau_{xz} = \left(y + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) Mr(t)$$

$$\tau_{yz} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - x\right) Mr(t)$$

L'omografia β si può perciò scrivere:

$$\beta = Mr(t)\beta_1 \tag{6}$$

dove β_1 è un'omografia funzione delle coordinate. Nel caso non ereditario vale ancora la (6) purchè in luogo di $Mr(t)$ si ponga una costante. Cioè, a meno di una costante moltiplicativa, β_1 è l'omografia degli sforzi nel caso non ereditario. Si ha perciò, ricordando le proprietà dell'omografia degli sforzi nel caso non ereditario

$$\text{grad}\ \beta = Mr(t)\ \text{grad}\ \beta_1 = 0$$

e se $\bar{n}$ è un vettore normale alla superficie laterale del cilindro:

$$\beta \bar{n} = Mr(t)\beta_1 \bar{n} = 0$$

e si prova così che sono soddisfatte le equazioni indefinite e le condizioni alla superficie laterale. Inoltre sulla base non vincolata si ha:

$$\beta \bar{n} = Mr(\mathrm{t})\beta_1 \bar{n}$$

cioè le forze distribuite sulla base che mantengono in equilibrio il cilindro devono essere in ogni istante proporzionali alle forze nel caso della torsione non ereditaria. Quindi il loro risultante è nulla, il loro momento risultante è diretto secondo l'asse z, e vale intensità:

$$\pi(t) = - Mr(t)I$$

dove ora

$$I = \int_S \left(x^2 + y^2 - x \frac{\partial \psi}{\partial y} + y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dS$$

Perciò se si assume $r(t) = M^{-1} \dfrac{\pi(t)}{I}$ le formule (5) rappresentano, in modo completo, la soluzione del problema della torsione nel caso ereditario nota la coppia $\pi(t)$. Si ha così modo di esprimere, mediante i coefficienti che compaiono nelle formule generali dell'elelasticità ereditaria, i termini K, $\Phi(t\ \tau)$ già introdotti dal VOLTERRA ([3]).