Letterio Toscano

Funzione generatrice dei prodotti di polinomi di Laguerre con gli ultrasferici

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.2, p. 144–149.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_2_144_0>

Funzione generatrice dei prodotti di polinomi di Laguerre con gli ultrasferici.

Nota di LETTERIO TOSCANO (a Messina).

Sunto. - *Si stabilisce una funzione generatrice dei prodotti di polinomi di* LAGUERRE *generalizzati con gli ultrasferici.*

1. Lo scopo di questa nota è di stabilire una funzione generatrice — nel senso più ampio della parola — dei prodotti di polinomi di LAGUERRE generalizzati

$$L_n^{(\alpha)}(x = \frac{(\alpha+1,\ n)}{n!}\ {}_1F_1(-n;\ \alpha+1;\ x)$$

con gli ultrasferici

$$V_n^{(s)}(x) = (-1)^n \frac{(s,\ n)}{n!} F\left(-n,\ s+n;\ \frac{s+1}{2};\ \frac{x+1}{2}\right).$$

Il risultato è degno di nota, in quanto — come si vedrà — tale generatrice ha tra i suoi fattori la funzione esponenziale e quella di BESSEL di prima specie. E poichè questa ultima interviene pure nelle generatrici dei soli polinomi dì LAGUERRE o ultrasferici, o dei prodotti di due polinomi di LAGUERRE, si prova sempre più quanto essa funzione sia legata a questi polinomi.

(3) VOLTERRA: " *Leçons sur les equations inlegrales* „ Paris, Gauthier Villars 1913, cap. IV, pag. 139.

La ricerca della nostra generatrice costituisce, nello stesso tempo, una applicazione della relazione integrale

$$\int_0^\infty e^{-\lambda u} J_\alpha(2u\sqrt{t}) J_{2\alpha}(2\sqrt{ux})\, du = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+4t}}\, e^{\frac{-\lambda x}{\lambda^2+4t}} J_\alpha\left(\frac{2x\sqrt{t}}{\lambda^2+4t}\right)$$

sulle funzioni di BESSEL di prima specie. E si farà pure qui qualche altra applicazione.

La precedente relazione, del tipo delle trasformate di LAPLACE, trovasi in un lavoro di VAN DER POL e NIESSEN (1); ma non trovasi riportata in recenti formulari di calcolo simbolico (2).

2. Consideriamo lo sviluppo $\left(\alpha > -\frac{1}{2}\right)$

$$\sum_0^\infty{}_n \frac{u^n L_n^{(2\alpha)}(x)}{\Gamma(2\alpha+n+1)} = e^u (ux)^{-\alpha} J_{2\alpha}(2\sqrt{ux}).$$

Si ha

$$\sum_0^\infty{}_n \frac{x^\alpha L_n^{(2\alpha)}(x)}{\Gamma(2\alpha+n+1)} \int_0^\infty e^{-\lambda u} u^{\alpha+n} J_\alpha(2u\sqrt{t})du =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda u} e^u J_{2\alpha}(2\sqrt{ux}) J_\alpha(2u\sqrt{t})\, du.$$

Il primo integrale (di HANKEL) è uguale a

$$\frac{\Gamma(2\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{t^{\frac{\alpha}{2}}}{\lambda^{2\alpha+n+1}} F\left(\alpha+\frac{n}{2}+\frac{1}{2},\ \alpha+\frac{n}{2}+1;\ \alpha+1;\ \frac{-4t}{\lambda^2}\right),$$

il valore del secondo è già noto: allora

$$\sum_0^\infty{}_n \left(\frac{1}{\lambda}\right)^n L_n^{(2\alpha)}(x) F\left(\alpha+\frac{n}{2}+\frac{1}{2},\ \alpha+\frac{n}{2}+1;\ \alpha+1;\ \frac{-4t}{\lambda^2}\right) =$$

$$= \Gamma(\alpha+1) \frac{\lambda^{2\alpha+1} x^{-\alpha} t^{-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{(\lambda-1)^2+4t}}\, e^{-\frac{(\lambda-1)x}{(\lambda-1)^2+4t}} J_\alpha\left[\frac{2x\sqrt{t}}{(\lambda-1)^2+4t}\right].$$

Ma (3)

$$F\left(\alpha+\frac{n}{2}+\frac{1}{2},\ \alpha+\frac{n}{2}+1;\ \alpha+1;\ \frac{-4t}{\lambda^2}\right) =$$

(1) B. VAN DER POL e K. F. NIESSEN, *Symbolic Calculus*, « The London, Edinburg, and Dublin Philosophical Magazine », s. 7, v. XIII, 1932, pp. 537-577.

(2) N. W. MC LACHLAN et P. HUMBERT, *Formulaire pour le calcul symbolique*, « Mémorial des Sciences Mathématiques », fasc. C, Paris, 1941; A. GHIZZETTI, *Calcolo simbolico*, Bologna, 1943; G. DOETSCH, *Tabellen zur Laplace-transformation*, Berlin, 1947.

(3) E. GOURSAT, *Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéométrique*, « Annales scientifiques de l'École normale supérieure », s. 2, supplément au t. X, 1881, pp. 3-142.

$$= \left(1 + \frac{4t}{\lambda^2}\right)^{-\alpha - \frac{n}{2} - \frac{1}{2}} F\left(2\alpha + n + 1,\ -n;\ \alpha + 1;\ \frac{\sqrt{\lambda^2 + 4t} - \lambda}{2\sqrt{\lambda^2 + 4t}}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{4t}{\lambda^2}\right)^{-\alpha - \frac{n}{2} - \frac{1}{2}} \frac{(-1)^n n!}{(2\alpha + 1,\ n)} V_n^{(2\alpha+1)}\left(\frac{-\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 4t}}\right),$$

quindi

$$\sum_0^\infty{}_n \left(\frac{-1}{\sqrt{\lambda^2 + 4t}}\right)^n \frac{n!}{(2\alpha + 1,\ n)} L_n^{(2\alpha)}(x)\, V_n^{(2\alpha+1)}\left(\frac{-\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 4t}}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\sqrt{(\lambda - 1)^2 + 4t}}\, x^{-\alpha} t^{-\frac{\alpha}{2}} (\lambda^2 + 4t)^{\alpha + \frac{1}{2}} e^{\frac{-(\lambda-1)x}{(\lambda-1)^2+4t}} J_\alpha\left[\frac{2x\sqrt{t}}{(\lambda - 1)^2 + 4t}\right].$$

E posto

$$\frac{-\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 4t}} = y, \qquad \lambda = \frac{y}{z},$$

si conclude ($|y| \leq 1$, $|z| < 1$)

$$\sum_0^\infty{}_n z^n \frac{n!}{(2\alpha + 1,\ n)} L_n^{(2\alpha)}(x)\, V_n^{(2\alpha+1)}(y) =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\sqrt{z^2 - 2yz + 1}} \left(\frac{2}{xz\sqrt{1 - y^2}}\right)^\alpha e^{\frac{xz(z-y)}{z^2-2yz+1}} J_\alpha\left(\frac{xz\sqrt{1 - y^2}}{z^2 - 2yz + 1}\right).$$

3. Questo sviluppo generale si riduce, in casi particolari, ad altri noti. Per $y = -1$ si ha

$$V_n^{(2\alpha+1)}(-1) = (-1)^n \frac{(2\alpha + 1,\ n)}{n!}$$

$$\lim_{y \to -1} \left(\frac{2}{xz\sqrt{1 - y^2}}\right)^\alpha J_\alpha\left(\frac{xz\sqrt{1 - y^2}}{z^2 - 2yz + 1}\right) = \frac{(z + 1)^{-2\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)}$$

e quindi ($|z| < 1$)

$$\sum_0^\infty{}_n (-z)^n L_n^{(2\alpha)}(x) = (z + 1)^{-2\alpha - 1} e^{\frac{xz}{z+1}}.$$

Per $y \equiv \frac{y}{\nu}$, $z \equiv z\nu$, $\nu \to 0$, poichè

$$\lim_{\nu \to 0} \nu^n V_n^{(2\alpha+1)}\left(\frac{y}{\nu}\right) = \frac{2^n\left(\alpha + \frac{1}{2},\ n\right)}{n!} y^n,$$

segue

$$\sum_0^\infty{}_n (2yz)^n \frac{\left(\alpha + \frac{1}{2},\ n\right)}{(2\alpha + 1,\ n)} L_n^{(2\alpha)}(x) =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\sqrt{1 - 2yz}} \left(\frac{2}{xyzi}\right)^\alpha e^{\frac{-xyz}{1-2yz}} J_\alpha\left(\frac{xyzi}{1 - 2yz}\right),$$

e più semplicemente [4], con $2yz = h$, $(|h| < 1)$, e l'introduzione della funzione di BESSEL ad argomento immaginario,

$$\sum_0^\infty {}_n\, h^n \frac{\left(\alpha + \frac{1}{2},\ n\right)}{(2\alpha + 1,\ n)} L_n^{(2\alpha)}(x) =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\sqrt{1 - h}} \left(\frac{4}{hx}\right)^{\alpha} e^{\frac{-hx}{2(1-h)}} I_\alpha\left[\frac{xh}{2(1 - h)}\right].$$

Per $x = 0$ si ha

$$L_n^{(2\alpha)}(0) = \frac{(2\alpha + 1,\ n)}{n\,!}$$

e quindi $(|z| < 1)$

$$\sum_0^\infty {}_n\, z^n V_n^{(2\alpha+1)}(y) = (z^2 - 2yz + 1)^{-\alpha-\frac{1}{2}}.$$

Per $x = \frac{x}{\nu}$, $z = \nu z$, $\nu \to 0$, poichè

$$\lim_{\nu \to 0} \nu^n L_n^{(2\alpha)}\left(\frac{x}{\nu}\right) = \frac{(-x)^n}{n\,!},$$

con $-xz = h$ si ha $(|y| < 1)$

$$\sum_0^\infty {}_n \frac{h^n}{(2\alpha + 1,\ n)} V_n^{(2\alpha+1)}(y) = \Gamma(\alpha + 1)\left(\frac{2}{h\sqrt{1 - y^2}}\right)^{\alpha} e^{hy} J_\alpha(h\sqrt{1 - y^2}).$$

4. Per $\alpha = \frac{1}{2}$, poichè $(y = \cos\gamma)$

$$V_n^{(2)}(\cos\gamma) = \frac{\operatorname{sen}(n + 1)\gamma}{\operatorname{sen}\gamma},$$

segue $(|z| < 1)$

$$\sum_0^\infty {}_n\, z^n \frac{\operatorname{sen}(n + 1)\gamma}{n + 1} L_n^{(1)}(x) = \frac{1}{xz} e^{\frac{xz(z-\cos\gamma)}{z^2-2z\cos\gamma+1}} \operatorname{sen} \frac{xz \operatorname{sen}\gamma}{z^2 - 2z\cos\gamma + 1}.$$

5. Lo sviluppo generale di questa nota si può anche ottenere, con procedimento analogo, prendendo le mosse dal secondo particolare sui polinomi ultrasferici (§ 3). Altri sviluppi si possono ottenere a partire da

$$\sum_0^\infty {}_n \frac{(-1)^n (u\sqrt{t})^{\alpha+2n}}{n\,!\,\Gamma(\alpha + n + 1)} = J_\alpha(2u\sqrt{t}) \qquad \alpha > -1$$

$$\sum_0^\infty {}_n \frac{(-1)^n (ux)^{\alpha+n}}{n\,!\,\Gamma(2\alpha + n + 1)} = J_{2\alpha}(2\sqrt{ux}) \qquad \alpha > -\frac{1}{2}.$$

[4] L. TOSCANO, *Sviluppi in serie della funzione ipergeometrica di Kummer*, « Rend. Accademia Nazionale dei Lincei-classe di scienze fis. mat., e nat. », s. VIII, v. VI, fasc. 5, 1949, pp. 590-597.

Dal primo si ha

$$\sum_0^\infty {}_n \frac{(-1)^n t^{\frac{\alpha}{2}+n}}{n!\,\Gamma(\alpha+n+1)} \int_0^\infty e^{-\lambda u} u^{\alpha+2i} J_{2\alpha}(2\sqrt{ux})\,du =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda u} J_\alpha(2u\sqrt{t}) J_{2\alpha}(2\sqrt{ux})\,du,$$

da cui, con $4t = -\lambda^2 h$ $(|h| < 1)$

$$\sum_0^\infty {}_n \frac{(2n)!}{2^{2n} n!\,\Gamma(\alpha+n+1)} h^n L_{2n}^{(2\alpha)}\left(\frac{x}{\lambda}\right) =$$

$$= 2^\alpha h^{-\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha} (1-h)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{-xh}{\lambda(1-h)}} I_\alpha\left[\frac{x\sqrt{h}}{\lambda(1-h)}\right].$$

Per $\lambda = \frac{1}{2}$ questo sviluppo trovasi, con diverso procedimento e qualche errore di stampa, in un lavoro di FELDHEIM [5].

Dallo sviluppo di definizione di $J_{2\alpha}(2\sqrt{ux})$ si ha

$$\sum_0^\infty {}_n \frac{(-1)^n x^{\alpha+n}}{n!\,\Gamma(2\alpha+n+1)} \int_0^\infty e^{-\lambda u} u^{\alpha+n} J_\alpha(2u\sqrt{t})\,du =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda u} J_\alpha(2u\sqrt{t}) J_{2\alpha}(2\sqrt{ux})\,du,$$

e successivamente

$$\sum_0^\infty {}_n \left(\frac{-x}{\lambda}\right)^n \frac{1}{n!} F\left(\alpha+\frac{n}{2}+\frac{1}{2},\ \alpha+\frac{n}{2}+1;\ \alpha+1;\ \frac{-4t}{\lambda^2}\right) =$$

$$= \Gamma(\alpha+1)\, \frac{x^{-\alpha}\, t^{-\frac{\alpha}{2}} \lambda^{2\alpha+1}}{\sqrt{\lambda^2+4t}}\, e^{\frac{-\lambda x}{\lambda^2+4t}} J_\alpha\left(\frac{2x\sqrt{t}}{\lambda^2+4t}\right).$$

Posto $\lambda = 1$, $-4t = \left(\frac{y}{y-2}\right)^2$, $x = -2z\frac{y-1}{y-2}$, osservato che [6]

$$F\left(\alpha,\ \alpha+\frac{1}{2};\ \gamma;\ x\right) = (1+\sqrt{x})^{-2\alpha} F\left(2\alpha,\ \gamma-\frac{1}{2};\ 2\gamma-1;\ \frac{2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$$

e che

$$F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ x) = (1-x)^{-\beta} F\left(\gamma-\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ \frac{x}{x-1}\right),$$

si deduce

$$\sum_0^\infty {}_n \frac{z^n}{n!} F\left(-n,\ \alpha+\frac{1}{2};\ 2\alpha+1;\ y\right) = 2^{2\alpha}\Gamma(\alpha+1)(yz)^{-\alpha} e^{\frac{z(2-y)}{2}} I_\alpha\left(\frac{yz}{2}\right).$$

(5) E. FELDHEIM, *Sul prodotto dei polinomi di Laguerre*, « Acta Pontificia Academia Scientiarum », anno VI, v. VI, 1942, pp. 359-370

(6) Cfr. (3).

E questo sviluppo, con i polinomi di JACOBI

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+1,\ n)}{n\,!} F\left(-n,\ n+\alpha+\beta+1;\ \alpha+1;\ \frac{1-x}{2}\right),$$

si può scrivere

$$\sum_0^\infty {}_n \frac{z^n}{(2\alpha+1,\ n)} P_n^{\left(2\alpha,\ -\alpha-n-\frac{1}{2}\right)}(1-2y) =$$

$$= 2^{2\alpha}\Gamma(\alpha+1)(yz)^{-\alpha} e^{\frac{z(2-y)}{2}} I_\alpha\left(\frac{yz}{2}\right).$$

Analoghe considerazioni, fatte nella trattazione generale, conducono ad una generatrice dei prodotti $L_n^{(2\gamma)}(x) P_n^{\left(2\gamma,\ -\gamma-n-\frac{1}{2}\right)}(y)$.