Bollettino Unione Matematica Italiana

Federico Gaeta

Sulle famiglie di curve sghembe algebriche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.2, p. 149–156.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_2_149_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1950.

Sulle famiglie di curve sghembe algebriche.

Conferenza di FEDERICO GAETA (a Madrid) ([1]).

La totalità delle varietà algebriche pure V_k^n di dimensione k ed ordine n di S_r si può porre in corrispondenza birazionale senza eccezioni coi punti di una varietà algebrica (generalmente spezzata ed impura) appartenente ad uno spazio proiettivo ([2]). Questa proprietà si esprime brevemente dicendo che la totalità delle V_k^n di S_r *costituisce* una varietà algebrica. Le componenti irriducibili di questa varietà diconsi *famiglie* di V_k^n. Una famiglia di V_k^n è dunque una varietà irriducibile non ulteriormente ampliabile di V_k^n. In questa conferenza mi propongo di dare uno sguardo d'insieme sulle ricerche più recenti intorno al problema della classificazione delle famiglie di curve sghembe algebriche.

Nel caso delle curve piane ($k = 1$, $r = 2$) il problema si esaurisce subito, in quanto la totalità delle curve piane d'ordine n costituisce un sistema lineare, cioè una varietà algebrica irriducibile

([1]) Conferenza tenuta nell'Istituto matematico « Salvatore Pincherle » dell'Università di Bologna il 10 febbraio 1950.

([2]) La possibilità di stabilire una siffatta corrispondenza è stata ammessa come evidente e non si accenna nemmeno al bisogno di dimostrarla nei primi lavori sull'argomento di HALPHEN [13], NOETHER [18], VALENTNER [24] ed altri: i primi cenni di dimostrazione si trovano appena nel classico trattato di geometria iperspaziale di BERTINI.

Nell'odierna critica dei fondamenti, svolta principalmente dai cultori dell'algebra astratta e da F. SEVERI, viene posta in primo piano la necessità di dimostrare questa proprietà, a provare la quale si giunge attraverso la cosiddetta forma associata (*zugeordnete Form*) o forma di CAYLEY [4] introdotta sistematicamente da van der WAERDEN e CHOW [5].

birazionalmente equivalente senza eccezioni ad uno spazio proiettivo. Invece per le curve sghembe esso è straordinariamente complesso e non è tuttora completamente risolto. La prima difficoltà sorge dal fatto che non basta l'ordine n per individuare una famiglia di curve sghembe appena sia $n > 1$. In ogni caso una famiglia di curve sghembe non è mai una varietà lineare.

Il primo valore di n per cui si viene ad avere più di una famiglia di curve irriducibili *appartenenti* all' S_3, è quattro. Vi sono infatti due famiglie di quartiche sghembe ben note, distinguibili mediante un altro carattere proiettivo: il genere p, che può assumere i valori zero od uno. Questo esempio potrebbe far credere che siano sufficienti i caratteri n, p per individuare una famiglia; ipotesi che però si manifesta inesatta appena si consideri l'esempio che, per primo, ha dato HALPHEN [13] (3) di due famiglie diverse coi medesimi caratteri n, p, distinguibili mediante un nuovo carattere ν (ordine minimo dei coni passanti per le corde uscenti da un punto generico dello spazio) (4).

I caratteri n, p, ν non bastano nemmeno ad individuare una famiglia di curve sghembe. (V. nota (5)). Dopo parecchi tentativi per trovare un numero finito di invarianti proiettivi atti ad individuare *ogni* famiglia di curve sghembe, HALPHEN [13] formulò l'ipotesi che il numero di tali caratteri crescesse indefinitamente con l'ordine. Le mie ricerche hanno confermato pienamente questa ipotesi per una classe molto ampia di curve sghembe, e quindi *a fortiori* è confermata in generale [9].

I primi tentativi di classificazione sistematica si trovano in quelle memorie con cui HALPHEN [13] e NOETHER [18] hanno ottenuto il premio STEINER della Accademia di Berlino nel 1882 (5).

Il metodo di NOETHER (detto delle intersezioni parziali) è fondato sulla teoria delle serie lineari di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica. NOETHER tentò di classificare le

(3) I numeri tra parentesi quadre richiamano la bibliografia posta alla fine.

(4) Trattasi di due famiglie di curve sghembe irriducibili del nono ordine e genere dieci per cui il carattere ν assume i valori quattro o cinque. I caratteri n, p, ν bastano fino all'ordine 14. Per $n = 15$, $p = 28$, $\nu = 9$ vi sono due famiglie.

(5) Il metodo di HALPHEN è fondato sulla rappresentazione, (introdotta da CAYLEY) di una curva sghemba come intersezione parziale di un cono ed un monoide. Esso permette, come dice HALPHEN [13], di enunciare e distinguere (almeno teoricamente) le diverse famiglie di curve di un dato ordine. Manca invece una definizione generale delle curve di queste famiglie, cioè manca una rappresentazione esplicita delle curve da studiare. HALPHEN ha ricondotto la questione ad un problema di contatti fra curve piane.

curve che appartengono a superficie di dato ordine ottenendo risultati molto notevoli diventati classici [18].

Un terzo tentativo di classificazione è dovuto a SEVERI ed ebbe origine dal concorso che l'Accademia danese delle Scienze pose nel 1901 per iniziativa dello ZEUTHEN onde accertare se in ogni famiglia di curve sghembe d'ordine n e genere p esistono curve spezzate in un n–latero i cui punti di connessione siano soltanto nodi in numero di $n+p-1$, in guisa che il genere effettivo dell'n-latero uguagli il genere virtuale. Una eventuale risposta affermativa, che sembra molto presumibile, sarebbe di grande interesse per la classificazione, giacchè permetterebbe di assegnare un rappresentante di ogni famiglia mediante uno schema esprimente le incidenze fra i lati dell'n–latero. La questione rimase allora senza risposta (6).

Nel 1915 SEVERI [21], [22] diede una risposta affermativa per le famiglie di curve d'ordine n di dimensione minima (uguale a $4n$) che egli chiamò *regolari* (7). Sono regolari, ad esempio, le famiglie di curve dette non speciali per cui la serie delle sezioni piane resa completa è non speciale.

Il metodo delle intersezioni parziali è stato ripreso recentemente da me usando il concetto di *residuale* di una curva sghemba dovuto a SEVERI. Prima di esporre queste ricerche voglio precisare il concetto di *resto* di una curva C rispetto a due superficie, che ho introdotto recentemente nell'ambito dell'algebra astratta. Consideriamo come assegnata una curva sghemba solo quando si conosce l'ideale omogeneo [25] (puro, ad una dimensione) di forme nelle coordinate omogenee x_0, x_1, x_2, x_3 dei suoi punti; dirò che due curve C_1, C_2 sono complementari rispetto alle superficie $f_1=0$, $f_2=0$ (prive di parti comuni) quando fra gli ideali (puri, a una dimensione) $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ appartenenti a C_1, C_2 e quello (f_1, f_2) generato da f_1, f_2 intercedono le seguenti relazioni

$$\mathfrak{c}_1 = (f_1,\ f_2) : \mathfrak{c}_2 \qquad \mathfrak{c}_1 = (f_1,\ f_2) : \mathfrak{c}_2 \quad [9] \quad (8).$$

Questa definizione, in apparenza astratta, è l'espressione della seguente proprietà intuitiva: Se C_1 e C_2 esauriscono l'intersezione completa delle superficie $f_1=0$, $f_2=0$, condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie $f=0$ *passi* per C_1 è che *ogni* superficie spezzata in $f=0$ più un'ulteriore superficie *passante* per C_2

(6) Nel 1907 BRILL diede una risposta affermativa per tutte le curve sghembe di genere ≥ 2.

(7) La dimensione di una famiglia di curve sghembe d'ordine n è $\geq 4n$ Il minimo è raggiunto soltanto per le curve a moduli generali.

(8) Per il concetto di ideale quoziente di due ideali dati ved. [25].

passi per la curva composta $C_1 + C_2$. Questa condizione si verifica certamente quando le curve C_1 e C_2 sono irriducibili e prive di punti multipli e costituiscono l'intersezione completa (e generalmente semplice) di $f_1 = 0$ e $f_2 = 0$ (9).

Ciò premesso, dicesi che una curva è di *residuale zero* quando il suo ideale omogeneo possiede una base costituita da due forme. In particolare saranno di residuale zero le curve irriducibili e prive di punti multipli, intersezioni semplici complete di due superficie in virtù del ben noto teorema $Af + B\varphi$ di NOETHER.

Supponendo di aver introdotto le curve di residuale $0, 1, \ldots, \rho - 1$, dicesi che una qualsiasi curva sghemba algebrica è di residuale ρ quando il residuale minimo dei suoi resti è $\rho - 1$ (10).

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una curva sghemba sia di residuale finito è che le superficie di ogni ordine dato l passanti per C seghino sopra un piano generico α il sistema completo delle curve d'ordine l di α col gruppo di punti base (C, α) (11). Se C è irriducibile e priva di punti multipli questa proprietà è equivalente alla completezza delle serie lineari staccate su C dalle superficie di tutti gli ordini (12).

(9) Per una precisazione del concetto d'intersezione completa e generalmente semplice di forme di un S_r ved. la letteratura citata da SEVERI in [23].

(10) Un cono F ed un monoide M d'ordine q di una rappresentazione della curva C^n hanno fuori di C $n(q-1)$ rette che esauriscono l'intersezione di F col cono tangente ad M nel suo vertice. Sembrerebbe a prima vista che tutte le curve fossero di residuale uno. Per evitare questo grave inconveniente SEVERI introdusse il concetto di residuale unicamente per le curve irriducibili e prive di punti multipli [8]. Ho fatto vedere in [9] come il concetto di resto, di cui sopra, (introdotto appunto per questo scopo) non dà luogo a questi dubbi e permette di estendere la definizione di residuale a curve spezzate e con singolarità arbitrarie.

(11) Le varietà V_d di S_r che godono di analoga proprietà sono state studiate da DUBREIL [6] col nome di varietà *de première espèce*. Sono di prima specie le V_d di una *catena* $V_d^{(\rho)}$, $V^{(\rho-1)}, \ldots, V_d^{(0)}$ di varietà (dove ogni $V_d^{(i)} (i = 0, 1, \ldots, \rho - 1)$ è resto della precente rispetto ad $r - d$ forme), che finisce in una intersezione completa $V_d^{(0)}$ di $r - d$ forme. Forse le prime ricerche su queste varietà appartenenti ad una catena si debbono a LÉGAUT [15]. Recentemente lo studio di queste varietà è stato ripreso in Francia da APÉRY [1], [2] ed in Italia, mediante l'applicazione sistematica del concetto di residuale per la classificazione delle famiglie di curve sghembe (o di V_{r-2} in S_r), da GAETA [8], [9], [10], [11], [12].

(12) Per la dimostrazione di questa proprietà, propostami dal prof. SEVERI, cfr. [11]. La completezza dei sistemi lineari staccati dalle forme di tutti gli ordini sopra una V_d di S_r è caratteristica delle varietà aritmeticamente normali nel senso di ZARISKI [27] come ha dimostrato MUHLY [17]. Il concetto di varietà di prima specie nel senso di DUBREIL dà l'esten-

L'ideale omogeneo appartenente ad una curva sghemba di residuale ρ è definito dai minori d'ordine massimo (supposti primi fra loro) estratti da una matrice omogenea $\mathcal{C}_{\rho+1,\rho+2} = (c_{ij})$; $i = 1, 2, \dots \rho + 1$; $j = 1, 2, \dots \rho + 2$ [13] di rango massimo, con $\rho + 1$ righe e $\rho + 2$ colonne, priva di costanti non nulle. Questa matrice si può sempre supporre normalizzata in guisa che gli ordini μ_{1j}, μ_{i1} degli elementi della prima riga e colonna soddisfacciano le disuguaglianze:

$$0 < \mu_{\rho+1,1} \leq \mu_{\rho 1} \leq \dots \leq \mu_{11}; \qquad \mu_{11} \leq \mu_{12} \leq \dots \leq \mu_{1\rho+2}.$$

Diremo che una matrice omogenea normalizzata $\mathcal{C}_{\rho+1,\rho+2}$ appartiene alla famiglia $F = \begin{pmatrix} \mu_{11}\mu_{12} \dots \mu_{1\rho+2} \\ \mu_{11}\mu_{21} \dots \mu_{\rho+1\,1} \end{pmatrix}$, quando le μ_{1j}, μ_{i1} sono gli ordini della prima riga e colonna. Una famiglia F di matrici omogenee è definita da una $(2\rho + 2)$-pla non ordinata di interi positivi arbitrari.

Ogni famiglia F di matrici omogenee normalizzate individua una famiglia di curve di residuale ρ e reciprocamente [9]; da ciò segue che esistono famiglie di curve di residuale ρ (per ogni $\rho = 0, 1, \dots$). La base dell'ideale $\mathfrak{c}$ appartenente ad una curva di residuale ρ è costituita da $\rho + 2$ forme. Il resto di una curva di residuale ρ rispetto a due superficie $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ è di residuale $\rho - 1$, ρ, $\rho + 1$ secondo che ambedue le forme f_1, f_2 appartengano ad una base di $\mathfrak{c}$, o ne appartenga una sola o nessuna [8]. L'ordine minimo di una curva di residuale ρ è $\binom{\rho+2}{2}$ [8]. Siccome abbiamo visto che una famiglia di curve di residuale ρ dipende da $2\rho + 2$ interi arbitrari *resta confermata l'ipotesi di* HALPHEN, giacchè $2\rho + 2$ cresce indefinitamente con ρ e $\binom{\rho+2}{2}$.

Esiste un numero finito $\left(= \binom{2\rho+4}{2}\right)$ *di famiglie regolari di*

sione naturale di quello di varietà aritmeticamente normale per le varietà spezzate e con singolarità arbitrarie [7].

[13] Chiamasi matrice omogenea una matrice di forme nelle coordinate omogenee $x_0, x_1, \dots, x_r$ di S_r tale che i suoi minori di qualsiasi ordine siano forme. Condizione caratteristica affinchè una matrice di forme sia omogenea è che gli ordini μ_{ij} di tutti i suoi elementi si possano esprimere mediante quelli μ_{i1}, μ_{j1} della prima riga e colonna mediante formule del tipo:

$$\mu_{ij} = \mu_{i1} + \mu_{1j} - \mu_{11}.$$

L'osservazione che le V_{r-2} di S_r $(r \geq 2)$ di residuale finito sono rappresentabili con una matrice siffatta è dovuta a APÉRY [2] nel caso che esse siano irriducibili. In generale si giunge ad analoga conclusione servendosi del concetto di resto citato.

curve di residuale ρ, caratterizzate dal fatto che i relativi $2\rho + 2$ invarianti siano tutti minori od uguali a tre. Tutte le altre famiglie di curve di residuale ρ sono sovrabbondanti e quindi *a moduli particolari.*

Se $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{\rho+2})$ è una base dell'ideale $\mathfrak{c}$ appartenente alla curva C di residuale ρ, le righe della matrice associata danno luogo a relazioni del tipo:

$$c_{i1}\gamma_1 + c_{i2}\gamma_2 + \dots + c_{i,\rho+2}\gamma_{\rho+2} \equiv 0 \qquad i = 1, 2, \dots, \rho + 1 \text{ (}^{14}\text{)}.$$

che esprimono che ogni riga della anzidetta matrice è una *sizigia* dell'ideale $\mathfrak{c}$. Anzi, tali righe costituiscono una base per l'intero modulo di sizigie. Essendo $\rho + 1$ il rango della matrice non vi sono altri moduli di sizigie ([15]).

([14]) Un vettore $(a_1, a_2, \dots, a_s)$ di forme di ordini $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$ dicesi *sizigia* dell'ideale $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s)$ (γ_i forme di ordini n_i), quando $n_i + \mu_i =$ cost e si verifica $a_1\gamma_1 + \dots + a_s\gamma_s \equiv 0$. Analogamente si definiscono le sizigie di un modulo di vettori di forme [12]. Tutte le sizigie di un ideale omogeneo costituiscono un modulo, che a sua volta possiede, in generale, un altro modulo di sizigie... ecc. Le sizigie sono state introdotte da HILBERT [14] per calcolare la cosidetta *funzione caratteristica* dell'ideale che esprime il numero di condizioni lineari che impone l'ideale alle forme di dato ordine (ossia la postulazione della varietà algebrica da esso rappresentata per le forme da quell'ordine). Il numero di moduli di sizigie di un ideale omogeneo è finito $\leq r + 1$ [14]. Recentemente GRÖBNER ha semplificato notevolmente i penosi calcoli a cui conduceva il metodo di HILBERT applicando la teoria alla geometria algebrica [12]. Egli ha dimostrato che il numero di moduli di sizigie dell'ideale appartenente ad una $V_r^{(d)}$ pura di S_r non è inferiore ad $r - d$. Il minimo è raggiunto [12] soltanto quanto la varietà (o l'ideale) è *perfetta* nel senso di MACAULAY [16]. Gli ideali perfetti coincidono con quelli di prima specie di DUBREIL per $d = 1$. Nel caso $d = r - 2$ le varietà perfette hanno due moduli di sizigie. Se $\rho + 2$ è il numero base dell'ideale il numero di sizigie indipendenti del secondo modulo è $\rho + 1$. GRÖBNER deduce in questa maniera che le varietà perfette V_{r-2} di S_r si rappresentano con una matrice omogenea *senza supporre che la* V_{d-2} *sia di residuale finito.* È particolarmente interessante il caso $r = 2$, in quanto che ogni gruppo di punti del piano è di residuale finito come ho dimostrato con tutta generalità in [9]. Questa proprietà era stata intuita e dimostrata faticosamente con qualche restrizione da LÉGAUT [15].

([15]) Cioè, l'ideale appartenente alla curva C è *perfetto*. Questa proprietà mi ha permesso di calcolare la postulazione di C in funzione dei $2\rho + 2$ invarianti μ_{1i}, μ_{j1} *per le superficie di tutti gli ordini* ed in particolare determinare il minimo ordine delle superficie per le quali la postulazione assume il suo valore regolare $\chi_l = lN - p + 1$. L'ordine n, il genere p ecc.

Una curva della famiglia F la cui matrice assuma la forma diagonale:

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & B_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & A_{\rho+1} & B_{\rho+1} \end{pmatrix}$$

è spezzata in $\binom{\rho+2}{2}$ curve di residuale zero $A_i = 0$, $B_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, \rho + 1; i = 1, 2, \ldots, i)$ [9]. La curva C di residuale ρ sarà d'ordine minimo $\left(= \binom{\rho+2}{2}\right)$ quando tutte queste curve siano rette. Se le $2\rho + 2$ forme $A_i = 0$, $B_i = 0$ si spezzano in prodotti di forme lineari la curva C diventa un n-latero di Severi [16]. Ne deriva che *in ogni famiglia di curve di residuale* ρ *esistono* n-*lateri di* Severi. Questa proprietà costituisce una notevole estensione dei risultati di Severi in quanto che (escluse le $\binom{2\rho+4}{2}$ famiglie regolari di curve di residuale ρ) le curve di queste famiglie sono a moduli particolari [9].

Per finire mi sia permesso di esprimere pubblicamente un senso di doverosa gratitudine al mio grande maestro prof. Severi che mi è stato guida sicura nella ricerca di quei miei risultati che ora ho esposto.

BIBLIOGRAFIA

[1] Apéry, « Comptes rendus de l'Ac. des Sciences. Paris, 220, 1945.
[2] » » » » » 222, 1946.
[3] Berzolari-Rohn, *Algebraische Raumcurven und abwickelbare Flächen*. « Enziklopädie math. Wissenschaften », Bd, III, 2, 2A.
[4] Cayley, « Quarterly journal of math- », (1860). Collected papers, 4, 446.
[5] Chow (e van der Waerden) « Math. Annalen », Bd, 113, (1937).
[6] Dubreil, *Quelques proprietés des varietés algébriques...*, « Act. scientifiques ind. », XII, Hermann, Paris 1935.

---

delle curve rappresentate da una matrice sono noti sin dal 1866, dopo i lavori di Salmon, Roberts, ecc. Per più ampie notizie sulle varietà matriciali rinviamo agli articoli enciclopedici di C. Segre [19] e L. Berzolari [3] ed alle lezioni litografate di Severi [23]. Per le varietà individuate da matrici di forme lineari ved. il libro di T. G. Room, *The geometry of determinantal loci*, « Cambridge University Press », 1938.

([16]) Si osservi che questo risultato si può estendere molto facilmente alle varietà definite sopra corpi astratti più generali sostituendo la continuità con la *Relatiostreue Spezialisierung* di van der Waerden [26]. Per una teoria geometrica delle varietà definite su corpi astratti vedi ad es. il recente libro di B. Segre [20].

[7] Dubreil, « C. Rendus de l'Ac. des Sciences », 226, n. 7, 1948.

[8] Gaeta, *Sulle curve sghembe algebriche di residuale finito*, « Annali di Matematica pura ed applicata », Serie IV, t. XXVII, 1948.

[9] Gaeta, *Nuove ricerche sulle curve sghembe algebriche di residuale finito e sui gruppi di punto del piano*, « Ann. di Mat. », S. IV, 1950.

[10] Gaeta « Rend. Acc. Lincei », Ser. VII, vol. III, fasc. I-II, 1947.

[11] » « Commentationes Pontificia Ac. scientiarum », 1948.

[12] Gröbner, *Moderne algebraische Geometrie*. Springer, Wien 1949.

[13] Halphen, *Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques*, « Journal de l'École polytechnique », t. 52, 1882.

[14] Hilbert, *Ueber die Theorie der algebraischen Formen*, « Math. Ann. », 36.

[15] Légaut, *Thèse.*, « Annales de Toulouse », t. 26. Paris 1925.

[16] Macaulay, *The algebraic theory of modular systems.* « Cambridge Tracts », 1916, pag. 98.

[17] Muhly. « Annals of mathematics », vol. 24, n. 4, 1941.

[18] Noether (Max). *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven.* « Abhand. preuss. Ak. Wiss. ». Berlin 1882.

[19] Segre (Corrado). *Mehrdimensionale Raüme*, « Enz. math. Wiss », Bd. III.

[20] Segre (B.). *Lezioni di geometria moderna*. Zanichelli, Bologna 1949.

[21] Severi. « Rend. Acc. Lincei », 24, pag. 1011 (1915).

[22] » *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, Teubner, Leipzig, Berlin 1921, Anhang G.

[23] Severi. *Geometria numerativa*, II, (litografie), Ed. Docet. Roma 1949.

[24] Valentiner. « Inauguraldisertation », Kopenhagen 1881, tradotto in tedesco in « Acta matematica », t. 2 (3883).

[25] Waerden. (van der). *Moderne Algebra*, I e II, Springer, Berlin 1939.

[26] » *Einführung in die algebraische Geometrie*. Springer 1939.

[27] Zariski. « American journal of math », t. LXI, 1939, pag. 349.