J. H. C. Whitehead

Teoria della dimensione

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.2, p. 156–164.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_2_156_0>

Teoria della dimensione.

1ª Conferenza di J. H. C. WHITEHEAD (a Magdalen College, Oxford) (*).

Sunto. - *Premessa la definizione topologica di dimensione, si dimostra che uno spazio euclideo ad* n *dimensioni ha dimensione topologica* n.

1. INTRODUZIONE. - Durante la prima metà di questo secolo si sono fatti grandi progressi nella geometria algebrica e differenziale e nella topologia. I matematici italiani hanno avuto una parte im-

(*) Questa Conferenza ed un'altra che uscirà nel prossimo fascicolo furono tenute in varie Università italiane, durante un giro di Conferenze ch'ebbe luogo recentemente sotto gli auspici del « British Council ».

portantissima nello sviluppo della geometria algebrica e differenziale. Pubblico ora queste Conferenze — dietro invito del professor SEGRE, che gentilmente si è occupato della loro traduzione — nella speranza di attrarre qualcuno dei giovani matematici italiani allo studio della topologia e al conseguente arricchimento della già gloriosa tradizione geometrica Italiana.

Le conferenze hanno carattere puramente espositivo, e le bibliografie poste alla fine non pretendono di essere complete. Numerose indicazioni bibliografiche ulteriori possono però ricavarsi dalle opere citate.

2. GEOMETRIA E TOPOLOGIA. – Verso la metà del secolo diciannovesimo, i matematici erano giunti ad accettare l'idea della possibilità di varie specie di geometrie. In linea generale, una qualsiasi geometria tratta un insieme di idee che derivano dalla esperienza quotidiana attraverso vari processi di astrazione e di generalizzazione. Così, per esempio, la geometria proiettiva fa intervenire la nozione di rettilineità, ma non quelle di angolo o di distanza; le geometrie euclidea e riemanniana si occupano di relazioni metriche, e nella geometria conforme si misurano gli angoli ma non le distanze. Tutte queste geometrie presuppongono la nozione di *continuità*, che è argomento di spettanza della topologia.

In topologia non si attribuisce nessun significato intrinseco alla distanza, all'angolo o all'allineamento. Per esempio la superficie di una sfera è topologicamente equivalente a quella di un cubo, in quanto è pressochè ovvio come i punti della superficie di un sfera possano mettersi in corrispondenza biunivoca continua con quelli della superficie di un cubo, ad es. per proiezione da un centro opportuno. Ma la superficie di una sfera o di un cubo non è equivalente a quella di un toro, poichè su di una sfera ogni curva chiusa non intrecciata divide la superficie in due porzioni, una « interna » e l'altra « esterna », mentre invece ciò non accade per la superficie di un toro, sulla quale trovansi curve « non delimitanti » un'area.

Parlerò ora della teoria della dimensione, che è un capitolo particolare della topologia.

3. SPAZI TOPOLOGICI. – Tutti gli spazi trattati comunemente in geometria sono — come si dice — degli *spazi topologici*, dotati in più delle proprietà geometriche di struttura pertinenti alle varie specie di geometria. Uno spazio topologico, X, è un insieme di elementi, detti *punti*, contenente certi sotto-insiemi di punti, detti *insiemi aperti*. Quello stesso insieme di punti associato ad una famiglia di insiemi aperti diversa dalla prima, può dar luogo ad uno spazio topologico diverso da X.

Gli insiemi aperti debbono sottostare a certe condizioni. Anzitutto, per convenzione, l'insieme vuoto e l'insieme totale X saranno considerati aperti. Inoltre:

(1) *L'intersezione di due insiemi aperti qualsiansi è un insieme aperto (eventualmente vuoto).*

(2) *La somma od unione di un qualsiasi insieme di insiemi aperti è un insieme aperto.*

Un insieme $C \subset X$ si dice *chiuso* se, e soltanto se, $X - C$ è aperto; avuto riguardo a ciò, gli assiomi suddetti si sarebbero anche potuti enunciare in forma equivalente valendosi degli insiemi chiusi. Per es. l'analogo di (2) per gli insiemi chiusi, è che l'intersezione di un qualsiasi insieme di insiemi chiusi è un insieme chiuso (eventualmente vuoto). In particolare, se $X_0 \subset X$ è un qualsiasi sottoinsieme di X, l'intersezione di tutti gli insiemi chiusi contenenti X_0 è chiuso. Esso dicesi la *chiusura*, $\overline{X}_0$, di X_0. Se X_0 è aperto, allora $\overline{X}_0 - X_0$ dicesi il *contorno* di X_0, e lo si denota col simbolo *cont* (X_0).

Esempio. - Sia X il piano euclideo riferito ad un sistema di coordinate cartesiane $(x. y)$. Un insieme $U \subset X$ è aperto se, e soltanto se, dato $(a, b) \varepsilon U$, allora $(x, y) \varepsilon U$ purchè $-\rho < (x-a, y-b) < \rho$ per qualche $\rho > 0$ sufficientemente piccolo. Se U è per es. l'interno di un cerchio o di un quadrato, allora *cont* (U) ha il solito significato elementare.

Una gran parte della topologia consiste nello studio delle *rappresentazioni* di uno spazio in un altro. Sia $f: X \rightarrow Y$ una trasformazione a un sol valore di X in uno spazio Y. In altri termini, f fa corrispondere un unico punto, $f(x) \varepsilon Y$, a ciascun punto $x \varepsilon X$. Non supponiamo che $f(x)$, $f(x')$ siano distinti se $x \neq x'$, così che ad esempio tutti i punti di X possono corrispondere ad uno stesso punto di Y. Pertanto, in generale, f non ha un'inversa a un sol valore, $Y \rightarrow X$. Ciononostante, se Y_0 è un qualunque insieme di Y, noi usiamo il simbolo $f^{-1} Y_0$ per denotare l'insieme dei punti, $x \varepsilon X$, tali che $f(x) \varepsilon Y_0$. Diciamo poi che f è *continua* se, e soltanto se, $f^{-1} V$ è aperto in X per ogni insieme aperto $V \subset Y$. Per *rappresentazione* intendiamo una trasformazione continua ad un sol valore. Diciamo infine che una rappresentazione $f: X \rightarrow Y$ è un *omeomorfismo* se, e soltanto se, essa è una corrispondenza biunivoca fra X e l'intero Y, la cui inversa (a un sol valore), $f^{-1}: Y \rightarrow X$, sia anche continua. Due spazi topologici legati da un omeomorfismo sono considerati come topologicamente equivalenti.

Nel definire uno spazio topologico, non occorre specificarne tutti gli insiemi aperti. Basterà invero conoscere una *base* per essi, ossia una famiglia, α, di insiemi aperti tale che un qualunque insieme aperto sia l'unione di insiemi della famiglia α. In altri termini, se V è un insieme aperto qualsiasi e se $x \varepsilon V$, allora vi è un $U \varepsilon \alpha$ tale che $x \varepsilon U$ e $U \subset V$. Illustriamo la cosa con due esempi.

Spazio euclideo ad n *dimensioni,* R^n. – Un punto in R^n è un insieme ordinato, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, di n numeri reali, e come base per gli insiemi aperti assumiamo gli insiemi, $U(a, r)$, consistenti dei punti x tali che

$$(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 < r^2,$$

per tutti i punti $a = (a_1, \ldots, a_n)$ con coordinate a_i razionali, e per tutti i valori razionali positivi di r.

Spazio hilbertiano. – Un punto nello spazio hilbertiano (reale) è una successione infinita, $x = (x_1, x_2, \ldots)$, di numeri reali tali che $x_1^2 + x_2^2 + \ldots$ converga. Come base per gli insiemi aperti prendiamo gli insiemi, $U(a, r)$, di punti x tali che

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - a_i)^2 < r^2,$$

per tutti i punti $a = (a_1, a_2, \ldots)$ le cui coordinate siano numeri a_i razionali, tutti nulli tranne un numero finito di essi, e per tutti i valori razionali positivi di r.

Questi due esempi godono di un'importante proprietà, comune anche ad altri spazi, di avere cioè una base numerabile per gli insiemi aperti. Per la teoria della dimensione ci occorre ammettere tale proprietà, ed inoltre due assiomi del tipo detto « di separazione ». Più precisamente, supporremo che:

(3) *Un insieme che consista di un solo punto è chiuso.*

(4) *Se* (C, C') $\subset$ X *sono due insiemi qualsiansi disgiunti e chiusi, esistono degli insiemi disgiunti ed aperti,* (U, U') $\subset$ X, *tali che* C $\subset$ U, C' $\subset$ U'.

(5) *Esiste una base numerabile per gli insiemi aperti di* X.

Come conseguenza dei cinque assiomi suddetti, è stato provato da P. Urysohn che X è allora necessariamente omeomorfo a un sottoinsieme dello spazio hilbertiano. Quei cinque assiomi, notevoli per la loro semplicità, costituiscono inoltre tutto quanto occorre per poter svolgere una teoria generale della dimensione.

4. Dimensione. – L'idea grossolana di dimensione si può identificare col numero delle misure, cioè col numero di coordinate, necessarie per determinare un punto nello spazio. Tale uso della parola dimensione, ragionevole in molti casi, è inadeguato per una teoria sistematica della dimensione. Osserviamo infatti che:

1) Se prendiamo come concetto fondamentale di dimensione quello dianzi indicato, è chiaro che veniamo a perdere la semplicità e la generalità dei precedenti sviluppi.

2) Nelle varie specie di geometrie si introducono diverse specie di numeri quali coordinate, per es. si usano spesso numeri complessi. Ora, un numero complesso equivalendo ad una coppia ordinata di numeri reali, la retta (euclidea) complessa non differisce dal piano (euclideo) reale, sicchè una « dimensione complessa » appare lo stesso che due « dimensioni reali ».

Inoltre, è ben noto ciò che debba intendersi per geometria proiettiva a n dimensioni, la quale può essere definita per mezzo degli assiomi di incidenza, estensione, ecc. o per mezzo di coordinate in un dato campo; ma uno spazio ad « n dimensioni », così ottenuto, può anche contenere soltanto un numero finito di punti. nel qual caso la dimensionalità « topologica » risulta sempre zero.

3) Cantor ha dimostrato che i punti dell' R^n, per ogni $n \geq 1$, possono porsi in corrispondenza biunivoca coi numeri reali. Così un punto in R^n può venire definito da una sola coordinata reale. Naturalmente la suddetta corrispondenza non è continua, ma

4) Peano ha mostrato che l'interno e il contorno di un quadrato in R^2 è l'immagine dell'intervallo $0 \leq x \leq 1$ in una rappresentazione (continua, ma non biunivoca).

Gli ultimi due risultati suggeriscono l'eventuale possibilità che R^m possa essere omeomorfo a R^n per qualche coppia di valori distinti di m, n. In tal caso sarebbe vano ricercare una teoria puramente topologica della dimensione, legata in modo significativo alla geometria elementare o all'esperienza fisica. Vedremo però che $\dim R^n = n$, dove $\dim X$, la dimensione (topologica) di X, è un invariante topologico dello spazio X. Perciò R^m non può risultare omeomorfo a R^n se $m \neq n$.

Sembra che Poincaré sia stato il primo a scorgere, dietro al concetto metrico di dimensione, quello più profondo che ora esporremo. Egli più precisamente si accorse che il criterio fondamentale non è il numero di misure da effettuarsi, ma invece la dimensione minima di un contorno. In ciò può a tutta prima riscontrarsi un circolo vizioso; ma così non è, in quanto si può procedere per induzione, pervenendo in tal guisa a porre la nozione di dimensione su di una base filosofica molto più semplice di quella metrica. Effettivamente, per chi sia chiuso in una stanza, la prima cosa che si presenta alla mente è l'idea di essere « rinchiuso entro una superficie »; il numero delle misure necessarie per specificare la propria posizione nella stanza, è un concetto assai più complicato.

Conviene anzitutto definire l'insieme vuoto come l'(unico) insieme subordinato di un dato spazio X che abbia *dimensione* -1. Sia poi $n \geq 0$ e. procedendo per induzione completa, supponiamo di aver definito gli spazi di dimensione *non superiore ad* $n-1$. Diremo che la dimensione di X in un punto x non eccede n. $\dim_x X \leq n$, se, e soltanto se. dato un qualunque intorno V_x, di x (cioè un qualsiasi insieme aperto contenente x), esiste in esso un intorno $U_x \subset V_x$, il cui contorno, $cont\,(U_x)$, è al più ad $n-1$ dimensioni.

Diremo che X è al più ad n dimensioni. $\dim X \leq n$, se, e soltanto se, $\dim_x X \leq n$ per ogni punto $x \varepsilon X$.

Se $\dim x \leq n$, senza che sia $\dim X \leq n-1$, allora diremo che $\dim X = n$. Infine, se per nessun $n = 1, 2, \ldots$ risulta $\dim X \leq n$. diremo che $\dim X = \infty$.

Una facile argomentazione per induzione mostra che, se X ed Y sono fra loro omeomorfi, risulta $\dim X = \dim Y$. Va rilevato in qual modo, nell' anzidetta definizione di dimensione, interviene l' idea di « separazione ». Il punto x è racchiuso in un intorno U_x. « arbitrariamente piccolo » (cioè $U_x \subset V_x$ per un V_x comunque assegnato), ed è così « separato » dallo spazio « esterno » alla chiusura di U_x da $cont\,(U_x)$, che è al più ad $n-1$ dimensioni.

Più generalmente, siano $(C, C') \subset X$ due qualsiansi insiemi chiusi disgiunti. Diremo che C, C' sono *separati* da un insieme chiuso, $B \subset X$, se, e soltanto se, $X - B$ è somma di due insiemi aperti disgiunti, U. U', tali che $C \subset U$, $C' \subset U'$. Se qualsiasi coppia di insiemi chiusi può essere separata in tal modo, allora X soddisfa certamente all' assioma (4); e si dimostra agevolmente anche il viceversa. Un teorema abbastanza facile da stabilire (*), afferma che:

TEOREMA 1. - *Se* $\dim X \leq n$, *allora* C *e* C' *possono essere separati da un insieme chiuso*, B, *ad* $n-1$ *dimensioni al più.*

Occorre inoltre il seguente teorema. Siano $(C_i, C_i') \subset X$ n coppie di insiemi chiusi disgiunti, per $i = 1, \ldots, n$ (si noti che C_i può intersecare C_j, C_j' se $j \neq i$, ma non C_i'); allora:

TEOREMA 2. - *Se* $\dim X \leq n-1$. *vi sono* n *insiemi chiusi* $B_1, \ldots, B_n$, *tali che* B_i *separi* C_1, C_1' *e non vi sia nessun punto comune a tutti gli insiemi* $B_1, \ldots, B_n$.

Per esempio, se $n = 2$, $\dim X \leq 1$, allora C_1, C_1' sono separati per il Teorema 1 da un insieme a 0 dimensioni, B_1, e C_2, C_2' da un insieme, B_2 (esso pure a 0 dimensioni), che non incontra B_1.

(*) Questo ed i teoremi enunciati più sotto sono dimostrati nel libro di HUREWICZ e WALLMAN citato nella bibliografia.

Preso $X = R^n$, consideriamo un intorno sferico U_a, dato da

$$(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 < r^2,$$

dove $a = (a_1, \dots, a_n)$, ed r è così piccolo che $U_a \subset V_a$, V_a essendo un intorno prefissato di a. Allora *cont* (U_a) è la sfera a $n-1$ dimensioni $(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 = r^2$, ed una facile argomentazione per induzione mostra che $dim\, R^n \leq n$. Ma *a priori* non siamo sicuri che, mediante un'abile scelta di una famiglia d'intorni U_a', non si possa dimostrare che $dim\, R^n < n$. Daremo ora un'idea del come possa venir stabilita l'uguaglianza $dim\, R^n = n$.

5. Il teorema di Brouwer o del punto unito. - Siano: I^n il cubo di R^n luogo dei punti, $x = (x_1, \dots, x_n)$, tali che $0 \leq x_i \leq 1$: E^n una qualunque n-cella, e cioè uno spazio topologico omeomorfo ad I^n; $f: E^n \to E^n$ una qualsiasi rappresentazione di E^n in sè. Sussiste allora il

Teorema 3 (di Brouwer). - *Esiste almeno un punto,* $p \in E^n$, *tale che* $f(p) = p$.

Si prova facilmente che, se questo vale per una data n-cella, il teorema è anche vero per qualunque altra n-cella. Potremo dunque senza restrizione supporre che E^n sia l' n-cella sferica di R^n data da $x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1$; stabiliremo allora il teor. 3, poggiando sul seguente teor. 4. Consideriamo la sfera ad $n-1$ dimensioni, S^{n-1}, data da $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$, ossia il « contorno » di E^n; ebbene:

Teorema 4. - *Non vi è nessuna rappresentazione,* $g: E^n \to S^{n-1}$, *tale che* $g(x) = x$ *per ogni punto* $x \in S^{n-1}$.

Non dimostreremo questo teorema, di cui ci accontenteremo d'indicare il contenuto intuitivo per i primi valori di n. Per $n = 1$ il teor. IV esprime il fatto che, se si ha un filo elastico le cui estremità siano vincolate a restare in due punti fissi ($x_1 = +1$ ed $x_1 = -1$), non è possibile di far andare simultaneamente ogni punto del filo o sull'uno o sull'altro dei due estremi senza rompere il filo. Per $n = 2$ si ha similmente una membrana elastica il cui bordo è vincolato a restare su di un cerchio fisso S^1; allora non è possibile di far andare simultaneamente ogni punto della membrana su S^1 senza strapparla.

Passiamo ora al teorema del punto unito! Supponiamo per assurdo che vi sia una rappresentazione, $f: E^n \to E^n$, senza punti uniti, sicchè $f(x) \neq x$ per ogni punto $x \in E^n$. Preso un qualsiasi punto $x \in E^n$, sia $g(x) \in S^{n-1}$ il punto in cui la semiretta $\overrightarrow{f(x)x}$, coll'origine in $f(x)$, incontra la sfera S^{n-1}, oppure la incontra nuovamente se $f(x) \in S^{n-1}$. Allora $g: E^n \to S^{n-1}$ è una rappresentazione, ed ovviamente $g(x) = x$ se $x \in S^{n-1}$. Ma ciò è assurdo, per il teor. 4, e questa contraddizione dimostra il teor. 3.

6. DIM $R^n = n$. – Poichè $dim\ R^n \leq n$ ed inoltre, evidentemente, $dim\ R^n \geq dim\ I^n$, basterà dimostrare che $dim\ I^n \geq n$. Lo faremo usufruendo del teorema di Brouwer (n. 5).

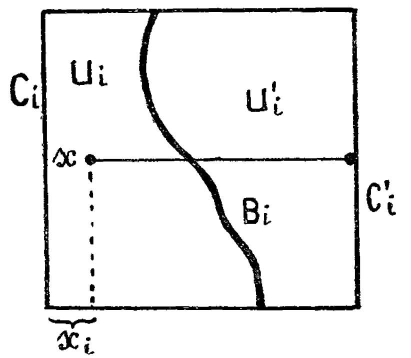

Fig. 1.

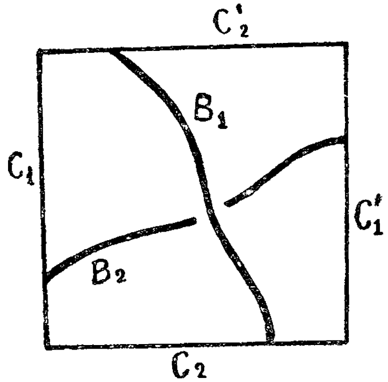

Fig. 2.

Sia C_i la faccia di I^n sulla quale $x_i = 0$ e C_i' quella su cui $x_i = 1$ (fig. 1). Supponiamo per assurdo $dim\ I^n \leq n - 1$. Allora, per il teor. 2, vi sono n insiemi chiusi $(B_1, \dots, B_n) \subset I^n$, non aventi fra loro nessun punto comune, tali che B_i separa C_i da C_i' (fig. 2). Sia $I^n - B_i = U_i + U_i'$, dove U_i, U_i' sono insiemi aperti disgiunti, tali che $C_i \subset U_i$, $C_i' \subset U_i'$ (fig. 2). La distanza (euclidea), $d(x, B_i)$, fra un dato punto $x \in I^n$ e B_i varia con continuità al variare di $x = (x_1, \dots, x_n)$ in I^n. Assumeremo:

$$f_i(x) = x_i + \alpha_i d(x, B_i),$$

dove $\alpha_i = 1$ se $x \in U_i$, $\alpha_i = -1$ se $x \in U_i'$.

Preso comunque $x \in U_i$ — per un dato $i = 1, 2, \dots, n$ — pongasi $x_i' = 1$, $x_j' = x_j$ se $j \neq i$, sicchè il segmento, parallelo all'asse x_i, che unisce x ad $(x_1', \dots, x_n')$, incontra B_i. Perciò $d(x, B_i) < 1 - x_i$, donde

$$0 < x_i + d(x, B_i) = f_i(x) < 1.$$

Pertanto il punto $f(x) = \{ f_1(x), \dots, f_n(x) \}$ appartiene ad I^n. Analogamente $f(x) \in I^n$ se $x \in U_i'$. Dunque f è una rappresentazione, $f : I^n \to I^n$.

In base al teor. 3, con $E^n = I^n$, esiste un $x \in I^n$ tale che $f(x) = x$.

cioè

$$x_i = f_i(x) = x_i \pm d(x, B_i) \qquad (i = 1, \dots, n),$$

e quindi $d(x, B_1) = \dots = d(x, B_n) = 0$. Perciò x appartiene a tutti i B_i, ciò che contraddice il teor. 2, applicato nell'ipotesi che $dim\, I^n \leq n - 1$; deve dunque essere $dim\, I^n \geq n$, eppertanto $dim\, R^n = n$.

BIBLIOGRAFIA

1. S. LEFSCHETZ, *Introduction to topology*, Princeton (1949).
2. S. LEFSCHETZ, *Algebraic topology*, New York (1942).
3. K. MENGER, *Dimensionstheorie*, Leipzig (1928).
4. W. HUREWICZ e H. WALLMAN, *Dimension Theory*, Princeton (1941).