UMI

Recensioni

* Memorie Scelte di Francesco Severi, vol I, Zuffi, Bologna, 1950 (Mario Villa)
* Federico Enriques, Le superficie algebriche, Zanichelli, Bologna, 1949 (Luigi Campedelli)
* E. T. Bell, I grandi matematici, Sansoni, Firenze, 1950 (Amedeo Agostini)
* Morris Marsden, The Geometry of the Zeros of a Polynomial in a complex Variable, American Mathematica Society, New York, 1949 (Alessandro Terracini)
* Einar Hille, Functional Analysis and semi-groups, American Mathematical Society, 1948 (Carlo Miranda)
* H. Von Sanden, Praktische Mathematik, Teubners Mathematische Leitfäden, 1948 (Piero Buzano)
* H. Von Sanden, Darstellende Geometrie, Teubners Mathematische Leitfäden, 1949 (Piero Buzano)
* Mario G. Salvadori, The mathematical solution of Engineering problems, MacGraw-Hill, New York, 1948 (Enzo Aparo)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.2, p. 178–191.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_2_178_0>

RECENSIONI

Memorie Scelte di Francesco Severi, vol. I, Bologna, Zuffi, 1950, pp. XX+458.

Il Comitato Nazionale per le Onoranze a Francesco Severi, costituitosi per celebrare il giubileo scientifico dell'insigne Maestro, la cui opera onora la Scienza e l'Italia, ha creduto opportuno raccogliere e coordinare la Sua produzione scientifica in un'unica pubblicazione, sebbene sia ben augurabile che il grande Geometra possa ancora a lungo proseguirla.

Purtroppo, per le difficoltà di questo dopo guerra, si è dovuto rinunciare ad un'edizione integrale dei Suoi lavori e limitarsi ad una raccolta di « Memorie Scelte ». Questa si comporrà di quattro volumi, nell'ultimo dei quali apparirà anche uno studio storico-critico sull'opera del Severi e sulla sua influenza nelle varie branche della Matematica.

Il primo di questi volumi è stato ora pubblicato e la prima copia di esso è stata consegnata a Francesco Severi il 25 Aprile u.s. a Roma, durante la cerimonia inaugurale in Suo onore, da Beniamino Segre che, con amore di discepolo e con la consueta perizia, ne ha curata l'edizione.

Questo primo volume, dedicato alla Geometria iperspaziale e numerativa, contiene quei lavori in cui l'A. svolge un'analisi rigorosa dei fondamenti della Geometria Algebrica e risolve elevati problemi di Geometria numerativa. È diviso in quattro Sezioni: Geometria numerativa, Fondamenti della Geometria algebrica. Geometria proiettiva ordinaria e iperspaziale, Teoria dei moduli e degli ideali.

Sono complessivamente 25 Memorie, delle quali 12 fra le più importanti rivedono la luce, riprodotte integralmente o parzialmente, mentre le rimanenti sono brevemente riassunte dall'A. stesso.

Ma ciò che conferisce al libro grande interesse anche per chi conosce già l'opera del Severi, ciò che lo rende vivo, nuovo, attuale, sono le Osservazioni nelle quali l'A. inquadra il lavoro nel periodo in cui fu scritto e indica le ricerche che lo seguirono, con raffronti e collegamenti del massimo interesse. Anche i sunti dei lavori che non vengono riprodotti offrono interesse analogo.

Ed ora ecco i titoli dei 25 lavori dai quali appare la materia trattata:

1) Sopra alcune singolarità delle curve di un iperspazio; 2) Ricerche sulle coniche secanti delle curve gobbe; 3) Sopra le coniche che toccano e secano una o più curve gobbe; 4) I gruppi neutri con elementi multipli, in un'involuzione sopra un ente razionale; 5 Le coincidenze di una serie algebrica $\infty^{(k+1)(r-k)}$ di coppie di spazi a k dimensioni, immersi nello spazio ad r dimensioni; 6) Intor-

no ai punti doppi impropri di una superficie generale dello spazio a quattro dimensioni, e a' suoi punti tripli apparenti; 7) Sugli spazi plurisecanti di una semplice infinità razionale di spazi; 8) Sulle intersezioni delle varietà algebriche e sopra i loro caratteri e singolarità proiettive; 9) Sul principio della conservazione del numero; 10) Sui fondamenti della geometria numerativa e sulla teoria delle caratteristiche; 11) Riflessioni intorno ai problemi numerativi concernenti le curve algebriche; 12) Sulla compatibilità dei sistemi di equazioni algebriche ed analitiche; 13) Del principio di Plücker-Clebsch e di altre cose meno importanti; 14) Un'ampia estensione del criterio di Plücher-Clebsch: 15) Ueber die Grundlagen der algebraischen Geometrie; 16) I fondamenti della geometria numerativa; 17) Ueber die Darstellung algebraischer Mannigfaltigkeiten als Durschnitte von Formen; 18) Il concetto generale di molteplicità delle soluzioni pei sistemi di equazioni algebriche e la teoria dell'eliminazione; 19) Sulla forma delle rigate cubiche; 20) Sui problemi determinati risolubili colla riga e col compasso; 21) Una proprietà delle forme algebriche prive di punti multipli; 22) Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati di data dimensione, immersi in uno spazio lineare; 23) Sulle sezioni spaziali delle varietà algebriche normali; 24) Rappresentazione di una forma qualunque per combinazione lineare di più altre; 25) Su alcune proprietà dei moduli di forme algebriche.

I lavori 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 21, 22, 24 sono riprodotti; 5, 6, 8, 9, 15, 16, 18, 21, 22 sono seguiti da Osservazioni complementari. Anche 10, 12 sono seguiti da note del Severi. I rimanenti sono riassunti.

I lavori contenuti in questo volume portano date assai diverse nel lungo periodo della poderosa attività scientifica del Severi. La Nota del 1900, *Ricerche sulle coniche secanti delle curve gobbe* — prescidendo da una Nota sull'estensione dei teoremi di Pascal e Brianchon che l'A. aveva fatto stampare fino dal 1898, mentre era studente — va considerata come la prima pubblicazione scientifica del Severi. Si passa poi dalla Sua dissertazione di laurea (*Sopra alcune singolarità delle curve di un iperspazio*), pubblicata nel 1901 nelle Memorie dell'Accademia di Torino, con una relazione di Corrado Segre che è riprodotta nel volume, alla basilare estesa Memoria, *I fondamenti della Geometria numerativa*, pubblicata negli Annali di Matematica, nel 1940, nel quarantesimo anniversario della Sua attività scientifica, e infine all'altra fondamentale Memoria, pubblicata pure negli Annali di Matematica, nel 1947: *Il concetto generale di molteplicità delle soluzioni pei sistemi di equazioni algebriche e la teoria dell'eliminazione*.

Dalle Osservazioni, dai Sunti, traspare spesso il temperamento profondamente umano del Severi. Quando Egli ricorda con affetto e venerazione i Suoi Maestri, quando ricorda i Suoi allievi, italiani e stranieri, dai più insigni e scomparsi, come il Comessatti, fino ai giovani che lavorano oggi sotto la Sua guida all'Istituto Nazionale di Alta Matematica da Lui creato e diretto con tanta passione ed entusiasmo, quando accenna alla Sua città natale.

Il libro si apre con una fotografia di Francesco Severi a cui segue una prefazione di Beniamino Segre e l'elenco cronologico delle pubblicazioni fino a tutto il 1949, corredato dall'indicazione dei lavori che saranno riprodotti anche nei successivi volumi.

Il volume ottimamente stampato, elegantemente rilegato, è edito dalla giovane, coraggiosa Casa Editrice bolognese del dott. Cesare Zuffi.

MARIO VILLA

FEDERIGO ENRIQUES: *Le superficie algebriche.* Bologna, Zanichelli, 1949. Un vol. in 8° di pp. XVI+464.

Uno dei grandi dottori della Chiesa — S. Tommaso, se non erro — ha lasciato scritto: « Sapienza è la scienza resa sapida ». Che cos'è questo sapore della scienza che ha potere di cambiarla in sapienza? Penso si tratti del carattere umano dell'indagine scientifica e della virtù di lasciarlo trasparire attraverso la passione e l'ansia del ricercatore. Se così è, quest'opera di Federigo Enriques è un'opera di sapienza.

Le sue pagine, *calde* di vita, riflettono tutta la personalità dell'A., geniale nelle intuizioni, acuto nelle disamine, e sempre ribollente e rigurgitante di idee, che avvicinano e lumeggiano mutuamente argomenti diversi, ricchi di suggestioni e di orientamenti. Ben lungi dalla figura del freddo scienziato che domina e placa l'orgasmo della creazione nella esposizione armonica e polita, lavorata di fine cesello, Federigo Enriques è qui il Maestro, il grande Maestro che, vicino all'occaso, ripensa e rivive l'opera sua: e lo vedete accendersi di entusiasmo di fronte ai risultati più significativi, lo sentite ripreso da ostinata tenacia nei punti più tormentati, sopraffatto da stupita meraviglia dinanzi alle scoperte più belle, fino a che, al termine del volume, l'impeto non più contenuto lo porta a parole di acceso lirismo.

« Cinquant'anni or sono s'iniziava in Italia lo studio di queste teorie, appena abbozzate dal genio di un precursore (Max Noether): allora, scherzando sulle difficoltà e le eccezioni che s'incontravano da ogni parte, si soleva dire che, mentre le curve algebriche (già composte in una teoria armonica) sono create da Dio, le superficie invece sono opera del Demonio. Ora si palesa invece che piacque a Dio di creare per le superficie un ordine di armonie più riposte ove rifulge una meravigliosa bellezza, e ch'Ei volle in esse — diciamo col Poeta —

del creator suo spirito
più vasta orma stampar ».

* * *

Il volume, che porta la data del 1949, era scritto fino dal 1942: nel '45 l'A. aveva aggiunto la prefazione, ma tuttavia non lo riteneva ancora pronto per la stampa. Nel breve indugio lo coglieva improvvisamente la morte (14 giugno 1946): così oggi l'opera appare postuma, e le mancano quei perfezionamenti che l'A. avrebbe potuto introdurvi, e che nessun altro ha osato tentare. Restano in essa alcun dubbi ed incertezze, in quei punti che il Castelnuovo definisce « ancora fluidi », e dei quali però ben pochi hanno qualche importanza effettiva.

Inizialmente quest'opera era nata come una seconda più ampia edizione dei due volumi, esauriti in breve tempo, che l'Enriques aveva dedicato alla teoria delle superficie con la collaborazione del Campedelli (1): i due autori anzi avevano iniziato, fino dal 1937, una rielaborazione, che però non era andata oltre lo studio del piano d'insieme e la redazione parziale dei primi capitoli. I tempi fortunosi, pur non interrompendolo, avevano ostacolato un più solle-

(1) F. ENRIQUES e L. CAMPEDELLI, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche,* Padova, « Cedam », 1932; *Sulla classificazione delle superficie algebriche, particolarmente di genere zero,* Roma, Rend. Seminario mat. dell'Università, 1934.

cito proseguimento del lavoro, che più tardi l'Enriques riprendeva da solo, concretandolo nel volume che oggi vale a ricreare la sua poderosa costruzione nel campo della teoria delle superficie algebriche, e che viene a rendere maggiormente completo il suo ben noto ed ormai classico Trattato. Infatti questo nuovo volume si aggiunge ai quattro in cui egli svolge, con la collaborazione del Chisini, la « Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche » (2), ed a quello sulle superficie razionali (redatto dal Conforto) (3), in sostituzione delle già ricordate prime « Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche » raccolte dal Campedelli (4).

* * *

Sfogliare queste pagine è ricostruire la storia dell'indirizzo algebrico della teoria delle superficie negli ultimi sessant'anni, sia pure da un punto di vista talvolta un poco unilaterale per il rilievo preponderante che vi è dato al contributo dell'Enriques.

Dopo che il Clebsch ebbe definito il genere delle superficie mediante la considerazione degli integrali doppi di prima specie, il Noether affronta lo studio di esse sotto l'aspetto algebrico, pervenendo (1869, 1874) a introdurre i due noti caratteri costituiti dal *genere geometrico*, p_g, e dal *genere lineare*. Del primo di essi egli tenta anche una definizione numerica (attraverso le *formule di postulazione*), la quale lo porta ad incontrare il *genere numerico*, o *aritmetico* (p_n o p_a), che egli presume dover essere uguale a quello geometrico, fatta eccezione per il caso delle rigate in cui diviene negativo (Cayley). In ogni modo lo Zeuthen e il Noether dimostrano, sotto larghe condizioni, che anche questo numero p_a è invariante per le trasformazioni birazionali della superficie.

Le indagini del Noether restarono per lunghi anni senza continuatori: più forte dell'ostacolo costituito dalle lacune da colmare, era la difficoltà di aprire una strada per affrontare comunque le questioni che rimanevano insolute. In Francia, nel 1884, E. Picard riprende lo studio delle superficie sotto l'aspetto trascendente: ma, poco dopo, è la Scuola italiana che, con nuove idee, getta « le basi dello studio generale delle superficie algebriche, considerate rispetto alle trasformazioni birazionali, segnando la via di problemi che dovevano maturare più tardi » (5). Gli inizi risalgono al 1893, l'anno in cui si trovarono a Roma Guido Castelnuovo e Federigo Enriques per dare inizio ad una collaborazione che doveva lungamente protrarsi. In quell'anno appaiono le classiche « Ricerche di geometria sulle superficie algebriche » dell'Enriques, alle quali fa seguito nel 1896 l'« Introduzione alla geometria delle superficie algebriche » e nel 1901 una nota semplificativa. I due geometri speculavano intorno ai problemi e alle loro soluzioni probabili, con vasto ardimento, procedendo in maniera induttiva, sulla base di esempi che via via andavano costruendo, e di cui miravano ad afferrare il valore e la portata generali. Non era, il loro,

(2) F. ENRIQUES ed O. CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, Bologna, Zanichelli, vol. I, 1915 (rist. 1929); vol. II, 1918; vol. III, 1924; vol. IV, *Funzioni ellittiche e abeliane*, 1934.

(3) F. ENRIQUES e F. CONFORTO, *Le superficie razionali*, Bologna, Zanichelli, 1939.

(4) Cfr. (1).

(5) F. ENRIQUES, *Arti e studi in Italia nell'ultimo venticinquennio: gli studi matematici*. « Leonardo », a. IV, 1928.

« il sentimento di curiosità del naturalista che raccoglie in un museo i più diversi tipi di animali o di piante o di minerali. Ma, come il museo viene a dare un'idea della ricchezza di forze della vita e conduce quindi a problemi generali della biologia, anche la raccolta di esempi, in questo campo delle matematiche, assume un significato essenziale sotto l'aspetto euristico e storico-costruttivo della scienza ». A queste faranno eco le parole del Castelnuovo nella magistrale prefazione: « Le teorie sorgevano per rispondere al bisogno che il matematico provava di delineare e precisare degli oggetti del pensiero che erano già, in forma vaga, presenti alla sua mente. Era l'esplorazione di un ampio territorio intravisto da una cima lontana ».

* * *

Così in poco tempo, la teoria ebbe un rapido sviluppo. L'Enriques assolse il compito della definizione generale degli invarianti (1893, 1896), a proposito della quale, nel 1898, conseguiva anche un notevole progresso metodologico definendo i sistemi aggiunti e il sistema canonico per mezzo degli jacobiani: un modo particolarmente fecondo, che consente la più vasta generalità, dalle curve alle superficie e alle varietà iperspaziali. Ripensando a questa sua brillante scoperta, egli sembra ora quasi meravigliarsene. Lo sentiamo esclamare: « L'idea è così semplice, la sua attuazione così facile, la sua portata così generale » che pare « debba trattarsi di cosa appartenente al patrimonio comune dei geometri e che dovrebbe essere nota da tempo, almeno per ciò che riguarda le curve » (cap. II).

Intanto (1894) il Castelnuovo perveniva al teorema che caratterizza le superficie razionali (cap. VI), e richiamava l'attenzione sul caso $p_g = 0$, nel quale il sistema canonico non ha un'esistenza effettiva. Riusciva all'Enriques di dare il primo esempio di una superficie, con il genere geometrico nullo, dotata di una curva bicanonica (sia pure d'ordine zero) (cap. III): e queste suggestive considerazioni mettevano in luce, fino da allora, l'importanza fondamentale dei caratteri invarianti (il *bigenere* ed i *plurigeneri*) collegati ai sistemi multipli di quello canonico.

A questi passi iniziali notevoli, segue un progresso di non minore importanza ottenuto dall'Enriques con la definizione generale e la determinazione del significato geometrico-funzionale del genere numerico p_a. Gli esempi costruiti dal Castelnuovo avevano mostrato come il Noether, presumendo che per una superficie non rigata dovesse essere sempre $p_a = p_g$, fosse caduto in errore, e avevano portato alla relazione $p_a \leq p_g$. Nasceva allora il problema di trovare il significato della differenza $p_g - p_a$, che prende il nome di *irregolarità* della superficie. In essa l'Enriques riconosce il valore massimo che può assumere la deficienza della serie canonica segata sopra la curva generica di un sistema dal suo aggiunto. Da un teorema, dovuto al Picard (1900), seguirà poi che non si tratta di un massimo ma del valore che essa costantemente presenta: e di ciò il Severi riuscirà per primo (1908) a dare una dimostrazione geometrica.

In tal modo il genere p_a viene ad essere collegato con la dimensione dei sistemi aggiunti, che si esprime mediante una formula nella quale è lecito ravvisare l'estensione alle superficie del noto *teorema di Riemann-Roch,* relativo alle serie lineari sopra una curva.

Dai sistemi aggiunti, e da quelli abbastanza ampi che comprendono il sistema canonico, il teorema di Riemann-Roch si estende poi a tutti i sistemi lineari. Il primo passo fondamentale verso questo risultato appartiene al Castelnuovo, il quale dimostra che la deficienza della *serie caratteristica* di un sistema lineare completo ha come massimo l'irregolarità $p_g - p_a$. Una dimostrazione diretta del teorema, semplice e del tutto generale, è dovuta al Severi: ad un'altra, di non minore interesse, è pervenuto recentemente l'Enriques (cap. IV). Del Severi conviene ricordare anche quei *criteri di equivalenza* (condizioni perchè due curve di ugual ordine, sopra una superficie, appartengano ad uno stesso sistema lineare) che nelle diverse applicazioni appaiono sempre più significativi (cap. III).

L'irregolarità $p_g - p_a$ di una superficie riceve una interpretazione ancor più luminosa in relazione ad altri sviluppi. Studi e ricerche dell'Enriques, del Castelnuovo e del Severi fanno sorgere la domanda: la serie caratteristica di un sistema continuo completo sarà completa? Risponde affermativamente l'Enriques (1904): data una superficie irregolare, di generi p_g e p_a, sopra di essa si può costruire un sistema continuo di curve avente la serie caratteristica completa, e che quindi risulta formato da $\infty^{p_g - p_a}$ sistemi lineari disequivalenti. Il Castelnuovo aggiunge (1905) che la varietà costituita da questi sistemi è una *varietà del Picard*, dotata di un gruppo continuo $\infty^{p_g - p_a}$ di trasformazioni permutabili.

La dimostrazione dell'Enriques — ripresa e semplificata poco appresso dal Severi (1905) — divenne allora il punto di partenza delle nuove ricerche intorno ai legami fra l'aspetto algebrico e quello trascendente della teoria delle superficie, tanto che nel 1910 il Poincaré ritrovava il teorema valendosi appunto di considerazioni di carattere trascendente, che venivano riesaminate successivamente dal Severi (1921), con notevoli semplificazioni. In quella circostanza il Severi sollevava una fine obiezione al ragionamento dell'Enriques, di cui comprometteva la validità, risparmiando il solo caso nel quale sia $p_g = 0$. Il significato di questa critica si può spiegare con un paragone che ha un valore intrinseco. Si pensi ad una curva, C, definita come intersezione di due superficie: la C ha la dimensione uguale all'unità, e ciò corrisponde, in generale, al fatto che ogni punto della curva ne possiede soltanto un altro infinitamente vicino. Ma, senza che cresca la dimensione di C, può crescere il numero dei punti infinitamente vicini ad un suo punto, come accade quando le due superficie passanti per la C si « toccano » lungo di essa.

Il tentativo di colmare questa lacuna ha portato l'Enriques a saggiare differenti vie, ed ha dato motivo a feconde discussioni ed a nuove ricerche, sue e di altri (B. Segre) (cap. IX).

* * *

La teoria delle superficie algebriche dà la misura della sua portata nei problemi di classificazione, dove i diversi tipi di superficie vengono definiti mediante i valori dei loro caratteri invarianti. All'inizio di quest'ordine di ricerche stanno gli studi relativi alle superficie razionali: di essi l'A. ha riferito in altro volume. Nell'attuale incontriamo (cap. VI) il risultato del Castelnuovo, di cui si è già detto.

Risale al 1901 una memoria, scritta in collaborazione da G. Castelnuovo e F. Enriques, in cui si prova che le superficie contenenti un sistema lineare di genere π e di grado $n > 2\pi - 2$ sono razionali, oppure riferibili a rigate (e il risultato sarà poi esteso dal Campedelli anche ai sistemi di dimensione nulla) (cap. X). Di qui deriva, fra l'altro, la proprietà — intuita dall'Enriques fino dalle sue prime ricerche, e da lui allora dimostrata con restrizioni superflue — che ogni superficie, non riferibile ad una rigata, si può sempre trasformare in altra priva di *curve eccezionali*, cioè di curve trasformabili in punti semplici (cap. IV).

La classificazione completa delle superficie irregolari con il genere $p_g = 0$ (che di necessità posseggono un fascio irrazionale di curve avente il genere $-p_a$; cap. IX) porta a riconoscere che esse, quando non appartengono alla famiglia delle rigate, sono *ellittiche* ($p_a = -1$) con un gruppo (ellittico) semplicemente infinito di trasformazioni birazionali in se stesse, e il loro studio è approfondito in vari sensi (Enriques, Bagnera, De Franchis, Severi, Chisini, Campedelli) (cap. X).

La caratterizzazione delle rigate avviene poi attraverso l'annullarsi del quadrigenere e del sestigenere (cap. X).

Infine, una classificazione generale, che s'inizia dall'esame delle superficie con infinite trasformazioni in sè, e passa ad una sintesi dei vari risultati che vengono riuniti o distinti in rapporto ai valori di certi plurigeneri, segna il risultato sul quale l'A. si ferma, poichè « come in un'ascensione alpina, si ama sostare sul picco conseguito, e di là contemplare lo spettacolo della natura che si offre alla vista ».

Se anche a noi è lecito fermarsi a guardare con Lui, appaiono le molte lacune che questo breve riassunto lascia nel quadro grandioso e policromo, e le frequenti deviazioni dalla linea seguita dall'A., alle quali ha portato il nostro sforzo di ripensamento, ristretto a pochi tratti generali e guidato talvolta più dalla successione storica delle scoperte che dall'ordine della ricostruzione geniale che appare nel volume. Conviene così tornare sui nostri passi per ricordare lo studio di alcuni invarianti aritmetici che, nel cap. V, è collegato a quello dei piani multipli; il posto che spetta alle superficie con il genere lineare uguale all'unità (cap. VII); la trattazione delle superficie regolari canoniche e pluricanoniche (cap. VIII); le molteplici considerazioni sulla teoria dei sistemi continui (cap. XI); ecc.

* * *

Ammonisce il Maestro, al termine della sua fatica: « La ricchezza delle proprietà e la bellezza, lungamente nascosta, che qui si palesano, non debbono costituire ragione di vano orgoglio per la scuola geometrica italiana o per i matematici stranieri che hanno collaborato a scoprirle, ma piuttosto debbono suscitare un senso di reverenza per quell'ordine meraviglioso degli enti matematici, che il pensiero trova innanzi a sè e quasi raccoglie, al pari delle specie viventi, dalla Natura Madre; e così alimentare la fede dei giovani ricercatori che dietro alle difficoltà, alle eccezioni, alle apparenti incongruenze c'è realmente, in questo mondo di enti, una divina armonia, che gli sforzi concordi degli studiosi riusciranno sempre meglio a mettere in luce ».

LUIGI CAMPEDELLI

* * *

E. T. BELL: *I grandi matematici*, ed. Sansoni, Firenze 1950.

Il titolo originale dell'opera è *Men of mathematics* e vuole essere una presentazione dello sviluppo della matematica nei secoli fino a oggi, fatta attraverso la biografia dei maggiori matematici. Vi si parla di matematici francesi, inglesi, tedeschi, ma i matematici italiani sono perfettamente sconosciuti, se se ne toglie Lagrange, che è considerato dall'A. più francese che italiano.

Le linee direttive del pensiero matematico sono spesso prospettate abbastanza bene, però la lettura del libro rivela che all'A. sono sconosciuti i risultati conseguiti dalla storia della matematica, specie nell'ultimo trentennio, e da ciò provengono i vari difetti che il libro presenta.

Da Archimede si passa addirittura a Descartes, dimenticando completamente l'opera non indifferente di Leonardo Fibonacci, di colui cui viene attribuita la maggiore influenza nella introduzione della numerazione posizionale, della relativa aritmetica e della risoluzione delle equazioni di 2° grado in Occidente, nonchè l'inizio della teoria dei numeri col suo *Liber quadratorum*.

Non si parla degli scopritori della risoluzione delle equazioni di 3° e 4° grado e delle trasformazioni delle equazioni da essi introdotte, come se fossero matematici da nulla, e di colui, il Bombelli, che fu il primo a introdurre e a insegnare le operazioni sui numeri complessi.

Bonaventura Cavalieri, che bene può stare alla pari di Fermat, è appena nominato: è con lui che, con la geometria degli indivisibili, ha inizio il moderno calcolo integrale. Anche Torricelli è conosciuto solo come precursore, secondo l'A., del barometro e nulla sa di quanto egli abbia fatto progredire in pochi anni il calcolo infinitesimale. Non parliamo poi di Pietro Mengoli, perfettamente sconosciuto all'estero.

Ma passiamo dapprima a porre in evidenza errori storici notati nel leggere il libro.

Per l'A., dal periodo aureo greco a Newton, intercorre « un vuoto di circa 2000 anni » (pag. 16), come se Diofanto non contasse nulla, come non esistesse il periodo arabo e come se il Cinquecento non ci avesse portato, per merito italiano, ai limiti dell'algebra.

La radice quadrata di 2 fu inventata da Eudosso (pag. 24), quindi per l'A. non è vero che la irrazionalità di $\sqrt{2}$ fosse scoperta dai Pitagorici e che Teodoro avesse dimostrato la irrazionalità dei numeri non quadrati da 3 a 17.

Strano poi ciò che si asserisce di Euclide (il cui metodo geometrico (pag. 26) « si insegna ancora ai disgraziati principianti ») per ciò che riguarda le prime 32 proposizioni del I libro: « noi sappiamo che questi enunciati di Euclide, che si ritenevano rigorosi, compresi i primi cinque, non sono per niente delle dimostrazioni » (pag. 75). Eccessivo è poi il giudizio negativo che l'A. dà sulla perfezione logica di Euclide (pag. 304): chè se osservazioni giuste si sono fatte sui postulati e su qualche dimostrazione, non si può non riconoscere la logicità della successione delle proposizioni e delle loro dimostrazioni.

Il padre Mersenne non fu mai gesuita (pag. 37), ma appartenne sempre all'ordine dei Minimi.

Secondo l'autore chi diede l'idea e le proprietà del barometro fu il Pascal (pag. 80); ma Torricelli si propose proprio di « far uno strumento che mostrasse le mutazioni dell'aria, hora più grave e grossa et hor più leggera e sottile ».

Non furono Galileo e Viviani a studiare le proprietà della cicloide e a darne la costruzione della tangente (pag. 84), ma bensì Torricelli, che ne determinò anche il centro di gravità, ritrovato che viene attribuito al Wren (pagina 85). Torricelli trovò detti risultati prima della morte (1647) e li comunicò ai matematici di Francia, quindi i problemi risolti da Pascal nel 1659 non sono una novità. In quanto poi alla probabilità, il primo problema fu risolto da Galileo e non da Pascal.

Non è vero che il teorema fondamentale che lega il calcolo integrale a quello differenziale sia dovuto a Newton (pag. 95); esso era già enunciato da Torricelli in forma cinematica e poi in forma geometrica da Barrow, il maestro di Newton. Come pure il calcolo integrale non fu trovato da Newton (pag. 95), perchè si hanno numerosi esempi precedenti a Newton.

Leibniz poi, secondo l'A., avrebbe introdotto l'algoritmo di serie (pag. 120), invece esso era già stato studiato dal Mengoli; anzi il Leibniz presentò una memoria all'Accademia di Londra e l'Oldenburg gli fece noto che i risultati da lui presentati erano già stati ottenuti dal matematico italiano.

A pag. 167 parla della risolvente dell'equazione di 5° grado senza dire che essa è dovuta al Malfatti e non accenna affatto che il teorema della irresolubilità della equazione generale di 5° grado era stato dimostrato dal Ruffini venticinque anni prima di Abel.

Parlando di Lobatcewski non accenna al precursore della geometria non euclidea, il Saccheri, e tanto meno dice a chi sia dovuta la pseudosfera.

In una nota tratta il Libri da « sedicente matematico » (pag. 327), dimostrando di non conoscere affatto l'opera del Libri.

Basta con gli errori storici e passiamo a osservazioni di altro genere. Si può notare che a pagina 69 si ha una dimostrazione che ci sembra errata, come pure a pagina 573 si legge che il numero definito da

$$\lim_{x \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log x\right)$$

è una costante, benchè la sua stessa definizione abbia l'aspetto di una variabile.

Estranea poi alla stòria della metematica e al pensiero matematico è la affermazione: « Anche oggi tale disprezzo (cioè il disprezzo per la pulizia personale) spinge i proletari dell'U.R.S.S. a semplificare le cose utilizzando i giardini pubblici e i campi sportivi di Mosca come latrine » (pag. 303). La cosa essendo tutt'altro che evidente all'intuizione, il lettore esigerebbe una prova!

A pagina 575 siamo addirittura in *presenza di un miracolo*: una parte di un gruppo infinito può avere lo stesso numero cardinale del gruppo intero. Se si concepiscono gli insiemi infiniti come attuali e si applicano a essi tutte le proprietà degli insiemi finiti; non si ha un miracolo, ma l'assurdo. E poco dopo si legge « l'intuizione è stata sopravalutata; essa è l'origine di tutte le superstizioni »; ciò che l'A. chiama intuizione, non è tale, ma è confusione di concetti e questa confusione può essere origine di superstizioni.

Tralasciando altre osservazioni che si potrebbero fare, notiamo che nell'ultimo capitolo l'A. riprende un tema, che non può sfuggire al lettore, perchè ripetuto moltissime volte nel testo, e cioè una tenace avversione dell'A. contro ogni credenza sopranaturale.

Pur non contestando a ognuno di pensare come vuole, il continuo ritornare sull'argomento in tono più o meno sarcastico ci sembra di cattivo gusto in un libro di carattere scientifico. Ci basti qualche citazione.

A proposito di Fermat l'A. dice « Non sembra che Fermat abbia mai avuto, come Descartes e Pascal, la tentazione insidiosa di filosofare su Dio, sull'Uomo e sull'Universo » (pag. 57). Non è certo da chiamare « tentazione insidiosa » il cercare di munire in unità di pensiero le varie scienze e tutti i problemi che interessano l'uomo

Il capitolo dedicato a Pascal, intitolato *Grandezza e miseria dell'uomo*, è pieno di astiosità verso il religioso matematico; mentre su Cauchy asserisce « era moderato in tutto, tranne in matematica e in religione, nei riguardi della quale mancava abitualmente di senso comune » (pag. 297).

Nella conclusione dell'ultimo capitolo l'A. dice: « ... ciò che verrà (cioè la nuova matematica) sarà... più estraneo a qualsiasi ricorso a entità estra-terrene per il bisogno di giustificazioni di ciò che in questo momento stiamo energicamente rimaneggiando ». Che significa ciò? Che la matematica dovrà ignorare i problemi filosofici e ridursi a un puro tecnicismo? Oppure che la nuova matematica darà la giustificazione totale dell'universo in se stesso? Nel primo caso non vi sarebbe progresso; nel secondo è da notare che le giustificazioni dei fatti si hanno in altri fatti, alcuni dei quali vanno assunti dall'intuizione, la quale è talvolta manchevole e spesso inadeguata alla realtà. Più profonda si rileva la conclusione contraria a quella dell'A. che molti scienziati traggono, come l'ha espressa il Severi in *La scienza e le soglie del mistero.*

Terminiamo notando alcuni strani errori riguardanti la comune nomenclatura: *geodesiche* per geodetiche; *sequenza* invece di successione; *soluzione in serie di una equazione differenziale; scissione* invece di sezione; *funzioni automorfiche* per funzioni automorfe e tralasciamo tanti altri che riteniamo errori di stampa.

Riassumendo, l'opera non ci sembra tale da giustificare l'avvenuta traduzione italiana, tanto più che l'A. ignora del tutto il contributo italiano allo sviluppo della matematica e non vi troviamo infatti, riferendoci all'ultimo periodo, alcun cenno del Cremona, del Beltrami, del Dini, del Bianchi. Solo due volte, incidentalmente, è citato il Volterra.

Noto poi che è invalso l'uso presso i nostri editori di stampare traduzioni di libri stranieri che spesso presentano un interesse relativo, non sempre storicamente esatti, scritti da persone non sempre a conoscenza dello sviluppo storico della matematica, mentre ad autori italiani e competenti è difficile trovare un editore.

AMEDEO AGOSTINI

* * *

MORRIS MARDEN: *The Geometry of the Zeros of a Polynomial in a complex Variable*, pp. 9 + 183. (« Mathematical Surveys »). « American Mathematical Society », New York, 1949.

Gli argomenti trattati nel presente libro concernono vari aspetti concreti del problema dell'ubicazione degli zeri complessi di un polinomio $f(z)$ dipendente da vari parametri, quali gli zeri — o i coefficienti — di altri polinomi aventi determinate relazioni con $f(z)$, oppure gli stessi coefficienti di $f(z)$.

Il cap. II — che segue ad un primo capitolo introduttivo — è dedicato agli zeri del polinomio f' derivato di f: esso muove dal teorema di LUCAS (gli zeri di f' sono contenuti in ogni poligono convesso contenente gli zeri di f) per passare a quello di JENSEN (secondo il quale, nel caso di coefficienti reali, ogni zero immaginario di f' sta in uno almeno dei cerchi aventi come diametri le coppie degli zeri immaginari coniugati di f), e poi a varie generalizzazioni, p.e. a quella, dovuta all'A., che fissa una regione contente gli zeri di una combinazione lineare di funzioni razionali di z per mezzo degli zeri e dei poli di queste e dei coefficienti della combinazione lineare. Altre generalizzazioni si trovano nel cap. III, dove in luogo della derivata f' del polinomio f di grado n compare la « derivata polare » $nf(z) + (\zeta - z)f'(z)$, dando luogo alla formulazione del teorema di Lucas nella forma invariante per sostituzioni lineari fratte, dovuta a LAGUERRE.

Nel cap. IV, prendendo le mosse dal teorema di GRACE su due polinomi apolari (ciascuno di essi ha almeno uno zero in ogni regione circolare comprendente tutti gli zeri dell'altro), si considerano, sempre per quanto concerne l'ubicazione degli zeri, vari tipi di dipendenza del polinomio in questione da due o più altri.

L'A. passa poi (cap. V) ad esporre i suoi risultati sugli zeri della derivata di una funzione razionale di z, ottenuta per prodotto e quoziente da vari polinomi aventi i loro zeri in regioni circolari: precedono i casi, considerati da WALSH, di due soli polinomi.

Mentre nella parte precedente si desumono indicazioni sugli zeri di f' in base alla considerazione di tutti gli zeri di f, nel cap. VI si esaminano le informazioni che si possono trarre dalla conoscenza di alcuni soli (due o più) di questi ultimi.

Col capitolo successivo, i parametri accennati in principio diventano i coefficienti del polinomio in esame, o alcuni di essi: precisamente nel cap. VII si studia la dipendenza da tutti i coefficienti, considerati dapprima soltanto nei loro valori assoluti, e poi anche nei loro argomenti.

Il teorema dimostrato da LANDAU (in relazione col teorema di Picard che afferma l'esistenza di almeno uno zero nel cerchio $|z| \leq 2 |a_0/a_1|$ per ogni trinomio $a_0 + a_1 z + a_n z^n$ ($n \geq 2$), da lui stesso esteso poi ai quadrinomi, costituisce un esempio del contenuto del cap. VIII, dove si tratta di ubicare p zeri in funzione di $p+1$ coefficienti (MONTEL), e in particolare dei primi $p+1$ (e del numero complessivo dei termini) se il polinomio presenta delle lacune.

In certo senso inverse di alcune tra le precedenti sono le questioni esposte nei due ultimi capitoli, alcune delle quali si riattaccano a vedute classiche: si tratta della determinazione del numero degli zeri situati in determinate regioni (semipiani, regioni angolari, cerchi).

Il libro è ricchissimo di risultati (vari di questi dovuti all'A.) e di riferimenti; amplissima la bibliografia. Il tema è attraentissimo per analisti e per geometri, la lettura risulta agevole e piacevole. Buona la composizione tipografica (sebbene tipograficamente poco felice la citazione di Cipolla a p. 164). Numerosissimi gli esercizi, molti dei quali sono stati inclusi come tali anzichè nel testo unicamente per deficienza di spazio.

Il libro è consigliabilissimo sia per chi voglia iniziarsi nel tema, sia per chi richieda un'informazione completa.

ALESSANDRO TERRACINI

* * *

EINAR HILLE: *Functional Analysis and semi-groups*, « American Mathematical Society » - Colloquium Publications, vol. 31, (1948).

Questo volume di E. Hille, presentato dalla A.M.S. nella consueta eccellente veste tipografica, si rivolge ad un capitolo dell'analisi funzionale che ha avuto negli ultimi venti anni notevoli sviluppi e cioè la teoria dei *semigruppi*. Com'è noto dicesi *semigruppo* un sistema di elementi $\mathfrak{S}$ per quali è definita un'operazione di composizione, godente della proprietà associativa, che ad ogni coppia ordinata di elementi a e b di $\mathfrak{S}$ fa corrispondere un terzo elemento c di $\mathfrak{S}$. In particolare formano un semigruppo la totalità degli endomorfismi (trasformazioni lineari limitate) di uno spazio di Banach in se, e lo scopo principale della presente opera è lo studio di quelle famiglie $\mathfrak{T} \equiv \{T(\alpha)\}$ di tali endomorfismi $T(\alpha)$ che dipendono da un parametro α (reale o complesso) in modo che riesca:

$$(1) \qquad T(\alpha)T(\beta) = T(\alpha + \beta),$$

famiglie a cui l'A. dà il nome di semigruppi ad un parametro. Tale argomento forma l'oggetto della Parte II del volume. La Parte I è poi dedicata ad una trattazione introduttiva della teoria degli spazi e delle algebre di Banach e delle funzioni e trasformazioni funzionali in tali spazi, mentre la Parte III è dedicata allo studio di semigruppi di tipo particolare ed alle applicazioni all'analisi classica. Chiude il volume un'appendice in cui viene approfondita, dal punto di vista puramente algebrico, la teoria delle algebre di Banach.

In complesso si tratta di un'opera veramente pregevole e che, per la chiarezza dell'esposizione, i numerosi riferimenti bibliografici, la novità di certi risultati, le ripetute segnalazioni di questioni ancora insolute, riuscirà assai utile a chi desideri approfondire questo campo di ricerche. Tuttavia non si può tacere che si nota un certo squilibrio tra gli ampi sviluppi della teoria astratta dei semigruppi e quelli, relativamente assai più modesti, delle concrete applicazioni di tale teoria. Ma ciò non è da imputarsi certamente all'A. dell'opera, bensì all'attuale stato di sviluppo della teoria e, forse, al carattere stesso di questo particolare ramo dell'analisi funzionale.

Chiuderemo questa recensione con un esame analitico dei singoli capitoli del volume.

La Parte I comprende i capitoli dal I al V. Il Cap. I è dedicato alla teoria degli spazi astratti di vario tipo. Nel Cap. II sono esposte le nozioni fondamentali relative agli andomorfismi. Nel Cap. III si richiamano varie nozioni relative alle funzioni di una variabile, reale o complessa, con condominio in uno spazio di Banach; particolarmente interessanti i paragrafi dedicati alla teoria dell'integrazione ed all'estensione del concetto di funzione olomorfa. Nel Cap. IV si studiano le funzioni che hanno sia il dominio di definizione che il condominio in uno spazio di Banach, con particolare riguardo ai procedimenti di differenziazione ed al concetto di funzione analitica. Nel Cap. V infine si riprende lo studio degli argomenti dei Capp. III e IV, nell'ulteriore ipotesi che gli spazi di Banach ivi considerati siano delle algebre.

In tutta questa I Parte l'esposizione ha carattere riassuntivo e le dimostrazioni, specie nei Cap. I e II, sono sovente omesse. La lettura di questi capitoli può riuscire assai utile a chi voglia iniziarsi allo studio dell'analisi funzionale, anche se per proseguirlo in direzioni diverse da quelle considerate dall'A. nelle parti successive.

La Parte II, che comprende i capitoli dal VI a XV, si inizia con un capitolo, il VI, che è ancora di carattere introduttivo e nel quale si danno i fondamenti della teoria delle funzioni subadditive. Nel Cap. VII viene introdotta la nozione di semigruppo. Nei Capp. VIII e IX si studia l'equazione funzionale

$$F(\alpha+\beta)=\mathcal{G}[F(\alpha);\ F(\beta)] \tag{2}$$

dove $F(\alpha)$ è una funzione che ha il dominio ed il condominio in due distinte algebre di Banach. Poichè la (1) è ovviamente un caso particolare della (2), dai risultati ottenuti si ricavano varie conseguenze relative ai semigruppi, tra le quali la più importante è l'esistenza di un *generatore infinitesimale* di ogni semigruppo ad un parametro, cioè di un operatore A tale che sia

$$T(\alpha)=e^{\alpha A}$$

dove il simbolo a secondo membro dev'essere definito opportunamente in relazione alle proprietà di $T(\alpha)$ ed alla topologia adottata nello spazio degli endomorfismi. Nel Cap. X si studiano gli integrali di Laplace, Cauchy, Poisson e le serie d'interpolazione per funzioni di una variabile reale o complessa che hanno il codominio in uno spazio di Banach. I risultati ottenuti vengono applicati nel Cap. XI per dimostrare che la trasformata di Laplace di un semigruppo ad un parametro eguaglia la risolvente del generatore infinitesimale del semigruppo.

Nel Cap. XII si indicano condizioni sufficienti affinchè un operatore sia il generatore di un semigruppo. Il Cap. XIII è dedicato allo studio dei semigruppi ad un parametro, analitici rispetto a questo parametro (supposto complesso). Nel Cap. XIV si danno teoremi di tipo ergodico o tauberiano relativi a semigruppi. Infine nel Cap. XV si studiano integrali del tipo

$$f(A) = \int_0^\infty T(\xi, A) d\beta(\xi)$$

come funzioni del generatore A di $T(\xi)$ e si stabiliscono varie relazioni fra gli spettri di A e di $f(A)$.

La parte III che, con l'appendice di cui si è già discorso, chiude il volume, comprende i capitoli dal XVI al XXI, ciascuno dei quali è dedicato a semigruppi di tipo particolare, il cui studio si ricollega con problemi di analisi classica. Data la natura di questi argomenti è impossible parlarne qui in dettaglio; ci limiteremo perciò a ricordare che gli argomenti di questo capitolo concernono varie questioni riguardanti le serie trigonometriche, gli spazi di Hilbert, il problema di Cauchy per le equazioni a derivate parziali, i procedimenti stocastici, l'integrazione frazionaria ecc.

Carlo Miranda

* * *

H. Von Sanden: *Praktische Mathematik,* « Teubners Mathematische Leitfäden », Band 44, (1948), pp. 100, fig. 17.

Il libricino è scritto per dare agli ingegneri una concisa ma chiara guida per l'esecuzione dei calcoli numerici ed è suddiviso in sei parti: Rappresentazione grafica delle funzioni. Formula di Taylor e formule di approssimazione. Integrazione, differenziazione e interpolazione. Statistica. Calcolo delle medie e metodo dei minimi quadrati. Analisi armonica. E non è poca cosa aver saputo trattare in cento paginette, pianamente ma correttamente, tutti questi argomenti con l'indispensabile corredo di esempi intercalati qua e là da benevoli suggerimenti per il calcolatore novizio: non ci sarebbe che da rallegrarsi se anche nelle mani dei nostri allievi circolassero frequentemente volumetti come questo!

Piero Buzano

* * *

H. Von Sanden: *Darstellende Geometrie,* « Teubners Mathematische Leitfäden », Band 2, 2 Auflage (1949), pp. 107, fig. 113.

L'Autore vuole che la Geometria Descrittiva sia un mezzo per sviluppare nell'allievo-ingegnere la facoltà di desumere dal disegno la rappresentazione visiva degli oggetti e non già un pretesto per propinargli sotto l'etichetta delle applicazioni teorie pertinenti ad altri settori della geometria. Tale punto di vista non ha molti seguaci in Italia dove i corsi universitari di Geometria Descrittiva risentono spesso delle esigenze disparate di un pubblico eterogeneo. Perciò il lettore italiano che si limitasse a dare un'occhiata all'indice di questo volumetto potrebbe anche giudicarlo povero di contenuto: iniziatane invece la lettura si troverebbe via via piacevolmente sorpreso della quantità di nozioni utili che l'Autore riesce a fare imparare, in così breve spazio, valendosi più di esempi appropriati che di metodi generali.

PIERO BUZANO

* * *

MARIO G. SALVADORI : *The mathematical solution of Engineering problems,* « Mac-Graw-Hill Book Company », Inc., New York, 1948; 245+X pp.

Un libro di « matematica per ingegneri » presenta di solito i concetti fondamentali e la tecnica del calcolo differenziale e integrale in una forma che fa più appello all'intuizione che ricorso alla logica, sacrificando spesso il rigore al desiderio che l'allievo si impadronisca di tutto ciò che è più immediatamente applicibile nella sua attività professionale. Il Salvadori, nel seguire tale indirizzo, fa precedere sistematicamente dalla posizione di un problema l'introduzione dei procedimenti matematici atti a risolverlo: nel successo conseguito mediante l'impiego di essi il lettore può così trovare una prima giustificazione della loro necessità.

I sei capitoli del libro trattano:

1) Idee fondamentali della matematica (numeri, variabili, funzioni, limiti, continuità, derivate, differenziali, integrali);

2) Elementi di geometria analitica;

3) Risoluzione numerica di equazioni algebriche e trascendenti;

4) Risoluzione numerica di sistemi di equazioni lineari algebriche;

5) Funzioni elementari di una variabile reale e di una variabile complessa, serie di potenze;

6) Sviluppi in serie di Fourier e analisi armonica.

Completano il volume più di mille esercizi, dei quali circa un terzo sono tratti da vari campi della meccanica, della fisica e dell'ingegneria. Essi costituiscono uno dei meriti principali del libro, la cui lettura è destinata a riuscire particolarmente proficua a tutti coloro che vogliano impadronirsi, insieme ai concetti fondamentali dell'analisi e della geometria analitica, dei metodi più frequentemente usati del calcolo numerico.

ENZO APARO