Bollettino Unione Matematica Italiana

Enrico Bompiani

Sopra una nozione di spazio osculatore ad una varietà introdotta da L. Berzolari

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.3-4, p. 213–218.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_3-4_213_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1950.

SEZIONE SCIENTIFICA

PICCOLE NOTE

Sopra una nozione di spazio osculatore ad una varietà introdotta da L. Berzolari.

Nota di ENRICO BOMPIANI (a Roma)

Sunto. - *Nuova caratterizzazione di uno spazio definito da* L. BERZOLARI *come* osculatore *in un punto ad una* V_m *di* S_n *euclideo o a curvatura costante. Estensioni varie agli spazi proiettivi e topologici.*

1. Nello studio delle proprietà di curvatura di una varietà V_m immersa in uno spazio euclideo S_n (o a curvatura costante) L. BERZOLARI [1] ha utilizzata una nozione interessante (introdotta dal KILLING [2]) che qui ricordo.

Si consideri un punto O della V_m e il suo spazio ivi tangente S_m. Si consideri uno spazio S_{m+1} per S_m e si proietti ortogonalmente ad S_{m+1} la V_m in una V_m'. Questa, come ipersuperficie in S_{m+1}, ha m curvature principali di cui si considera la somma.

Questa somma dipendente dallo S_{m+1} ammette un valore estremo per una ben definita posizione dello S_{m+1}. Questo S_{m+1} il BERZOLARI chiama *osculatore* alla V_m nel punto perchè nel caso $m = 1$ (curva V_1) il piano così definito è proprio il piano osculatore alla curva nel punto.

(1) L. BERZOLARI, *Sulla curvatura delle varietà tracciate sopra una varietà qualunque*, « Attt Acc. di Torino », vol. XXXIII, (1897-98); Nota I, p. 692-700; Nota II, p. 759-778.

(2) W. KILLING, *Die Nicht-Euklidischen Raumformen in Analytischer Behandlung.* (Teubner, Leipzig, 1885); Art. 129. Il BERZOLARI ha utilizzato la nozione che segue per studiare le proprietà d'immersione di una V_h in una V_m.

È ben chiaro tuttavia che lo spazio così definito, appena sia $m > 1$, *non* è legato proiettivamente alla V_m (e non coincide affatto con la nozione di spazio osculatore nel senso abituale, cioè contenente l'intorno del secondo ordine del punto sulla V_m).

Dal desiderio di chiarire la portata della nozione di spazio osculatore nel senso del BERZOLARI è nata questa breve Nota ([3]).

2. Sia S_n uno spazio proiettivo e in esso una $V_m (1 < m < n-1)$ di cui si considera un punto O. Conviene distinguere le coordinate proiettive, non omogenee in due gruppi x^i, $i = 1, \dots, m$, e z^α, $\alpha = 1, \dots, n-m$ in modo da poter rappresentare la V_m nell'intorno di $O(x^i = z^\alpha = 0)$ con le equazioni ([4])

$$z^\alpha = \frac{1}{2} c^\alpha_{ik} x^i x^k + [3]. \tag{2.1}$$

Uno S_{n-1} passante per lo S_m tangente in O a V_m ha equazioni del tipo

$$\lambda_\alpha z^\alpha = 0 \tag{2.2}$$

e la sua sezione con V_m ha per cono tangente in O quello di equazioni

$$\lambda_\alpha c^\alpha_{ik} x^i x^k = 0, \qquad z^\alpha = 0. \tag{2.3}$$

Siano poi dati, con vertice in O e nello S_m tangente $z^\alpha = 0$, i coni quadrici

$$\underset{\mu}{a_{ik}} x^i x^k = 0, \qquad \mu = 1, \dots, M = \frac{m(m+1)}{2} - 1. \tag{2.4}$$

Essi definiscono un sistema lineare ∞^{M-1} cui appartiene il cono (2.3) se e solo se

$$\begin{vmatrix} \lambda_\alpha c^{ik}_\alpha \\ \underset{1}{a_{ik}} \\ \vdots \\ \underset{M}{a_{ik}} \end{vmatrix} = 0 \tag{2.5}$$

(a primo membro è il determinante le cui colonne si ottengono

([3]) Che dedico alla memoria del BERZOLARI nel primo anniversario della Sua morte (11 dicembre 1949).

([4]) Si sottintendono le sommazioni rispetto agli indici ripetuti. Poichè la dimensione dello spazio (osculatore in senso proiettivo) contenente l'intorno del 2° ordine di un punto di V_m è $\leq \frac{m(m+3)}{2}$, si può sempre supporre $\alpha \leq \frac{m(m+1)}{2}$.

facendo assumere ad ik tutte le combinazioni con ripezione di $1, 2, \dots, n$).

La condizione (2.5) è lineare nelle λ_α e determina un S_{m+1} per lo S_m. Se s'indica con a^{ik} il minore d'ordine M estratto dalla matrice (a M righe e $M+1$ colonne)

$$\left| \begin{matrix} a_{\underset{1}{ik}} \\ \vdots \\ a_{\underset{M}{ik}} \end{matrix} \right| \tag{2.6}$$

sopprimendo in essa la colonna con gli indici ik e alternando i segni, i coni dati sono apolari al cono inviluppo

$$a^{ik} u_i u_k = 0 \tag{2.7}$$

da essi determinato. Sicchè è lo stesso riferirsi al sistema ∞^{M-1} di coni o al cono inviluppo (2.7).

La condizione (2.7) si scrive

$$\lambda_\alpha c^\alpha_{ik} a^{ik} = 0 \tag{2.8}$$

cioè lo S_{m+1} in parola è determinato dallo S_m tangente e dal punto di coordinate $x^i = 0$ e

$$z^\alpha = c^\alpha_{ik} a^{ik}. \tag{2.9}$$

Ciò prova il teorema:

Dati in uno S_n *proiettivo:* $V_m (1 < m < n-1)$ *e nello* S_m *tangente ad essa in un suo punto* O *un sistema lineare* ∞^{M-1}, $M = \frac{m(m+1)}{2} - 1$, *di coni quadrici con vertice in* O *(o un cono quadrico inviluppo), rimane definito uno* S_{m+1} *per* S_m *tale che ogni* S_{n-1} *per* S_{m+1} *sega* V_m *in una* V_{m-1} *(con punto doppio in* O*) il cui cono tangente in* O *appartiene al sistema lineare dato (o è apolare al cono inviluppo).*

3. Se lo S_n è euclideo e s'indica con Ω l'assoluto nel suo S_{n-1} improprio, si può considerare in relazione al punto O di V_m la sezione dello S_{m-1} improprio di S_m con Ω; e il cono inviluppo di vertice O determinato da tale sezione.

Lo S_{m+1} che in base al teorema precedente è determinato da questo sistema di coni è quello considerato dal BERZOLARI.

Similmente nel caso di uno spazio non-euclideo (a curvatura costante).

Sul caso in cui l'ambiente S_n sia un qualsiasi spazio di RIEMANN mi riservo di tornare prossimamente.

4. Il teorema del n. 2 si estende subito nel modo seguente:

Data in S_n *proiettivo una* $V_m (1 < m < n-1)$ *e nello* S_m *tangente ad essa in un punto* O *un sistema lineare* ∞^{M-p-1} *di coni,* *ove* $0 < p < n - m - 1$ *e* $< M$, *con vertice in* O *rimane definito uno* S_{m+p+1} *per* S_m *tale che ogni* S_{n-1} *per* S_{m+p+1} *sega* V_m *in una* V_{m-1} *(con punto doppio in* S*) il cui cono tangente in* O *appartiene al sistema lineare dato.*

Esso deriva da ciò che sostituendo nel primo membro della (2.5) al determinante che vi figura l'analoga matrice ad $M+1$ colonne e ad $M-p+1$ linee e scrivendo ch'essa ha rango $M-p$ si hanno $p+1$ condizioni lineari omogenee nelle λ_α; e quindi gli iperpiani cercati passano per un S_{m+p+1} contenente S_m. Il caso già trattato corrisponde a $p=0$.

5. Dal precedente teorema di carattere proiettivo si passa ad un teorema di carattere topologico considerando in uno spazio numerico X_n una V_m e una V_m' aventi in comune un punto O e la giacitura ivi tangente che indicherò con S_m. Ha senso parlare in questa giacitura di coni quadrici (di direzioni) di vertice O e di loro sistemi lineari.

Agli S_{n-1} del teorema precedente, passanti per S_m, bisogna sostituire V_{n-1} contenenti l'intorno di 2° ordine (o calotta di 2° ordine) di V_m' in O. Si ha allora:

Date in X_n *due varietà* V_m, V_m' *aventi in comune un punto* O *e la giacitura ivi tangente* S_m, *e dato in questa un sistema lineare* ∞^{M-p-1} *di coni di vertice* O *rimane determinata una* $(m+p+1)$*-giacitura* S_{m+p+1} *tale che tutte (e sole) le* V_{n-1} *contenenti la calotta di* 2° *ordine di centro* O *su* V_m' *e seganti* V_m *in* V_{m-1} *(con punto doppio in* O*) il cui cono tangente appartenga al sistema lineare dato riescono tangenti alla* S_{m+p+1};

cioè le giaciture tangenti alle V_{n-1} dette in O contengono la S_{m+p+1}, che a sua volta contiene la S_m.

6. Nel teorema precedente intervengono, con ufficio diverso, due varietà tangenti in un punto. Ritorniamo allo spazio proiettivo S_n e considerate in esso due varietà tangenti in un punto, V_m e V_m', cerchiamo, con metodo analogo al precedente, un teorema in cui le due varietà abbiano ufficio simmetrico.

Siano esse rappresentate nell'intorno di O da

$$(6.1) \qquad z^\alpha = \frac{1}{2} c_{ik}^{\alpha} x^i x^k + \dots, \qquad z^\alpha = \frac{1}{2} d_{ik}^{\alpha} x^i x^k + \dots$$

e nello spazio tangente S_m in $O(x^i = z^\alpha = 0)$ sia dato il sistema lineare ∞^{M-2} di coni quadrici definito da

$$(6.2) \qquad \underset{\mu}{a}_{ik} x^i x^k = 0, \qquad \mu = 1, \dots, M-1.$$

Affinchè un iperpiano $\lambda_\alpha z^\alpha = 0$ seghi V_m e V_m' in V_{m-1}, V_{m-1} i cui coni tangenti in O stiano in un sistema lineare ∞^{M-1} (e non ∞^L) con i coni dati occorre e basta che si abbia

$$\left| \begin{matrix} \lambda_\alpha c^\alpha_{ik} \\ \lambda_\alpha d^\alpha_{ik} \\ \underset{1}{a_{ik}} \\ \vdots \\ \underset{M-1}{a_{ik}} \end{matrix} \right| = 0. \tag{6.3}$$

Posto per brevità

$$D^{\alpha\beta} = \left| \begin{matrix} c^\alpha_{ik} \\ d^\beta_{ik} \\ \underset{1}{a_{ik}} \\ \vdots \\ \underset{M-1}{a_{ik}} \end{matrix} \right| \tag{6.4}$$

la condizione precedente si scrive pure

$$D^{(\alpha\beta)}\lambda_\alpha\lambda_\beta = 0, \qquad D^{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}(D^{\alpha\beta} + D^{\beta\alpha}) \tag{6.5}$$

cioè gli iperpiani richiesti inviluppano un cono quadrico. Perciò:

Date in S_n *proiettivo due* V_m *tangenti in un punto* O *e dato nello* S_m *ivi tangente un sistema lineare* ∞^{M-2} *di coni quadrici di vertice* O *rimane definito un cono quadrico, avente per vertice lo* S_m, *dotato della seguente proprietà: tutti e soli i suoi* S_{n-1} *tangenti segano le due* V_m *in coppie di* V_{m-1} *i cui coni tangenti in* O *stanno in un sistema* ∞^{M-1} *col sistema dato.*

Per fare un esempio prendiamo $m = 2$, cioè due superficie tangenti in un punto O e nel piano ivi tangente due rette.

Se la coppia di rette è, come si può sempre supporre purchè siano distinte, determinata da $z^\alpha = 0$, $x^1x^2 = 0$, la (6.3) diviene

$$\left| \begin{matrix} \lambda_\alpha c^\alpha_{11} & \lambda^\alpha c^\alpha_{22} \\ \lambda_\alpha d^\alpha_{11} & \lambda_\alpha d^\alpha_{22} \end{matrix} \right| = 0, \qquad \alpha = 1, \dots, n-2. \tag{6.6}$$

Se l'ambiente è uno S_4 questa condizione definisce due S_3; se essi sono reali e distinti e si assumono come $z^1 = 0$ $(\lambda_2 = 0)$ e $z^2 = 0$ $(\lambda_1 = 0)$ si ha

$$\left| \begin{matrix} c^\alpha_{11} & c^\alpha_{22} \\ d^\alpha_{11} & d^\alpha_{22} \end{matrix} \right| = 0$$

cioè le due superficie sono rappresentata da

$$z^\alpha = \frac{1}{2}(c^{\alpha\,\prime}_{11} x^1 x^1 + 2c^\alpha_{12} x^1 x^2 + c^\alpha_{22} x^2 x^2) + \dots$$

$$z^\alpha = \frac{1}{4}\rho^\alpha (c^\alpha_{11} x^1 x^1 + 2d^\alpha_{12} x^1 x^2 + c^\alpha_{22} x^2 x^2) + \dots$$

ove ρ^α è una costante (non si sommi rispetto ad α).

Se si tiene presente che gli assi z^1, z^2 *non* sono geometricamente determinati (ma solo gli S_3 cui appartengono con lo S_2 tangente) nè lo sono i loro punti impropri, e se si considerano le due equazioni per $\alpha = 1$ (o per $\alpha = 2$) si ha la seguente proprietà caratteristica dei due S_3:

Si proiettino le due superficie V_2, V_2' *da un punto di uno* S_3 *sull'altro nelle superficie* $\overline{V}_2$, $\overline{V}_2'$; *esiste sempre un'omologia (avente per piano asse il piano tangente) che applicata per es. a* $\overline{V}_2$ *la trasforma in altra che taglia* $\overline{V}_2'$ *in una curva avente per tangenti le due rette date.*

Se l'ambiente ha dimensione ≥ 5 si ha un effettivo cono quadrico inviluppo (generalmente non degenere).