Bollettino Unione Matematica Italiana

Luigi Muracchini

Sulla superficie rappresentativa di una trasformazione cremoniana fra piani

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.3-4, p. 229–236.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_3-4_229_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1950.

Sulla superficie rappresentativa di una trasformazione cremoniana fra piani.

Nota di Luigi Muracchini (a Bologna).

Sunto. - *Si dimostra che la superficie* Σ *di* S_{n+4}, *rappresentativa di una trasformazione cremoniana* T *d'ordine* n, *secondo* L. Godeaux, *è la superficie normale di quella studiata dal* Villa, *che rappresenta* T *sulla* V_4^6 *di* C. Segre.

1. In una recente conferenza, tenuta al Seminario Matematico dell'Università di Bologna, il prof. L. Godeaux ha illustrato una interessante rappresentazione delle trasformazioni cremoniane (1); nel caso del piano, una trasformazione cremoniana T d'ordine n viene rappresentata mediante una superficie Σ dell' S_{n+4}. Il prof. M. Villa, in quella occasione, affermò che era probabile che la superficie Σ_T da lui studiata, rappresentativa di T sulla varietà di C. Segre V_4^6 di S_8 (2), si potesse ottenere mediante una opportuna

(1) L. Godeaux, *Une représentation des transformations birationelles du plan et de l'espace.* « Mém. Ac. Roy. Belgique ». T. XXIV, f. 2, 1949.

(2) M. Villa, *Superficie della* V_4^6 *di Segre e relative trasformazioni puntuali.* « Mem. Acc. Sci. Bologna ». S. IX, T. IX, 1942, pp. 71-82. La questione di cui si dice poi trovasi segnalata nella nota (26) a pag. 77.

proiezione della superficie Σ, superficie normale della Σ_T. In questa Nota dimostro tale fatto. Dò preventivamente risposta ad una questione segnalata dal prof. VILLA nella sua Memoria citata in (2) dimostrando che le uniche trasformazioni cremoniane, d'ordine $n \geq 4$, la cui superficie rappresentativa sulla varietà di C. SEGRE appartiene ad un S_7 sono le trasformazioni di DE JONQUIERES. Infine nel n. 5 aggiungo una osservazione sulle trasformazioni puntuali fra due piani per le quali uno dei tre sistemi di curve caratteristiche, in ciascuno dei piani, è un fascio di rette e le rette di tali due fasci si corrispondono in una proiettività subordinata dalla trasformazione.

2. Consideriamo, in un piano π, una rete omaloidica di curve d'ordine n ed esaminiamo la seguente questione: se sia possibile trovare tre curve della rete C_1, C_2, C_3 e tre rette r_1, r_2, r_3 non appartenenti ad un fascio in modo che risulti

$$\lambda_1 r_1 C_1 + \lambda_2 r_2 C_2 + \lambda_3 r_3 C_3 \equiv 0 \tag{1}$$

dove le λ_i sono costanti, non tutte nulle, e con $r_i C_i$ abbiamo indicato il primo membro dell'equazione della C_i^{n+1} spezzata nella curva C_i e nella retta r_i.

Consideriamo le varie possibilità, tralasciando le giustificazioni che non presentano difficoltà. Manifestamente la (1) non può sussistere se due delle λ_i sono nulle, nè se le tre curve C_i coincidono.

a) Sia nulla una sola delle λ_i e sia ad esempio λ_3, allora la (1) si riduce alla

$$r_1 C_1 \equiv r_2 C_2 \tag{2}$$

e questa mostra che C_1, C_2 devono avere, rispettivamente, come componenti r_1, r_2 ed una componente comune d'ordine $n-1$, C'. Si può dunque scrivere $C_1 \equiv r_2 C'$, $C_2 \equiv r_1 C'$; ne discende subito che C' è fondamentale per la rete, e poichè questa viene a contenere il fascio $\lambda C_1 + \mu C_2 \equiv C'(\lambda r_2 + \mu r_1)$ avente C' come componente fissa, se ne deduce che la rete è attualmente una rete di DE JONQUIÉRES.

b) Se due delle C_i coincidono, ad esempio $C_2 \equiv C_3$, la (1) si riduce alla

$$\lambda_1 r_1 C_1 \equiv (\lambda_2 r_2 + \lambda_3 r_3) C_2 \tag{3}$$

e poichè, per le ipotesi fatte, le rette r_1 e $\lambda_2 r_2 + \lambda_3 r_3$ sono certamente distinte, si ricade nella conclusione di *a*).

c) Nessuna delle λ_i sia nulla e le C_i siano distinte; si debbono ora esaminare diverse possibilità. Osserviamo che la (1) esprime attualmente che la curva r_1C_1 fa parte del fascio $\lambda r_2C_2 + \mu r_3C_3$ e quindi deve passare per tutti i punti base di quello; ancora si osservi che, se C_2, C_3 hanno una componente comune, della quale r_1 non faccia parte, questa deve essere componente anche della C_1, in forza della (1).

Un computo privo di difficoltà mostra subito che la (1) è impossibile se C_1, C_2, C_3 sono prive di componenti comuni e d'ordine $n > 3$ [3]. Supponiamo dunque che C_2, C_3 abbiano a comune una componente C', d'ordine $m < n - 1$, della quale non faccia parte r_1 e che pertanto è componente anche di C_1. Allora (1) diventa, posto $C_1 \equiv C'C_1'$, $C_2 \equiv C'C_2'$, $C_3 \equiv C'C_3'$

$$\lambda_1 r_1 C_1' + \lambda_2 r_2 C_2' + \lambda_3 r_3 C_3' \equiv 0 \tag{4}$$

le C_i' essendo d'ordine $n - m > 1$. Ora si osserva che C' deve essere curva fondamentale della rete, ne discende subito che C_1', C_2', C_3' appartengono ad un fascio, $C_1' \equiv \lambda C_2' + \mu C_3'$, sicchè

$$(\lambda\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2)C_2' + (\mu\lambda_1 r_1 + \lambda_3 r_3)C_3' \equiv 0. \tag{5}$$

Poichè λ_1, λ_2 e λ_3 sono, per ipotesi, diverse dallo zero, come pure λ e μ, le rette $\lambda\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2$, $\mu\lambda_1 r_1 + \lambda_3 r_3$ sono certo distinte; pertanto (5) implica che C_2' e C_3' abbiano a comune una componente d'ordine $n - m - 1$ e quindi che C_2 e C_3 abbiano a comune una componente d'ordine $n - 1$ e si ricade così in *a*).

Infine rimane da esaminare il caso in cui r_1 sia componente di C_2 e di C_3, avendosi $C_2 \equiv r_1C_2'$, $C_3 \equiv r_1C_3'$; allora (1) diventa

$$C_1 \equiv \lambda r_2 C_2' + \mu r_3 C_3' \tag{6}$$

con C_2', C_3' prive di componenti comuni e quindi aventi non più di un punto comune fuori della base della rete. Un computo analogo a quello fatto più sopra permette di constatare facilmente che la C_1 non può passare per tutti i punti comuni alle r_2C_2' e r_3C_3',

[3] Infatti, i punti base del fascio $\lambda r_2C_2 + \mu r_3C_3$ sono: $n^2 - 1$ punti base della rete omaloidica, 1 punto comune a C_2, C_3 (fuori della base), 1 punto comune ad r_2, r_3, $2n$ punti comuni ad r_2, C_3 e ad r_3, C_2. La C_1 passa per la base della rete e può incontrare ciascuna delle C_2, C_3 in un sol punto fuori della base (non avendo le tre curve componenti comuni) e passare eventualmente anche per il punto comune ad r_2, r_3. La retta r_1 dovrebbe dunque contenere i rimanenti $2n - 1$ punti ed è facile vedere che ciò è impossibile nelle ipotesi fatte.

come esigerebbe la (6), senza avere con quelle due curve qualche componente a comune.

Concludendo, la relazione (1) si può soddisfare soltanto se la rete delle C_i è una rete di DE JONQUIÈRES. Di più si vede facilmente che in tale caso, supposto $n \geq 4$, e fissate comunque le tre rette r_1, r_2, r_3, allora le tre curve della rete si possono scegliere in un sol modo.

3. Fra due piani distinti π_1 e π_2 consideriamo la trasformazione cremoniana T di equazioni

$$x_i = f_i(y_1, y_2, y_3) \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{7}$$

e siano

$$y_i = \varphi_i(x_1, x_2, x_3) \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{7'}$$

le equazioni della trasformazione inversa, dove le x_i sono coordinate proiettive omogenee in π_1 e le y_i le analoghe in π_2. Consideriamo la varietà V_4^6 di C. SEGRE di S_8, rappresentativa delle coppie di punti dei piani π_1 e π_2. Le equazioni parametriche di V_4^6, in coordinate omogenee, possono scriversi notoriamente

$$X_{ij} = x_i y_j \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{8}$$

le x_i, y_j essendo i parametri (omogenei).

La superficie cremoniana Σ_T rappresentativa sulla V_4^6 della trasformazione T è data parametricamente dalle

$$X_{ij} = x_i \varphi_j \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{9}$$

oppure dalle

$$X_{ij} = y_i f_j \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{9'}$$

che manifestamente si equivalgono [4].

Vogliamo ora esaminare quando accade che la superficie Σ_T appartiene ad uno spazio S_7 anzichè all'S_8. Manifestamente occorre perciò, e basta, che si possano trovare nove costanti λ_{ij} non tutte nulle, tali che

$$\sum_{i,j} \lambda_{ij} X_{ij} = \sum_{i,j} \lambda_{ij} x_i \varphi_j \equiv 0. \tag{10}$$

Consideriamo soltanto il caso che l'ordine di T sia ≥ 4 [5]. Innanzi tutto si vede subito che la relazione (10) non può valere se delle λ_{ij} sono diverse dallo zero soltanto le tre λ_{i1}, λ_{i2}, λ_{i3} (con $i = 1$,

[4] Potendosi passare dalle (9) alle (9') col porre $x_i = f_i(y_1, y_2, y_3)$.

[5] Per gli altri casi si veda: VILLA, la Memoria citata in [2].

oppure 2, oppure 3). Infatti la (10) si ridurrebbe allora alla

$$x_i(\lambda_{i1}\varphi_1 + \lambda_{i2}\varphi_2 + \lambda_{i3}\varphi_3) \equiv 0 \tag{11}$$

che non può sussistere dato che le tre curve di equazioni $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$ non appartengono certo ad un fascio. Poniamo

$$\Phi_i = \lambda_{i1}\varphi_1 + \lambda_{i2}\varphi_2 + \lambda_{i3}\varphi_3;$$

le $\Phi_i = 0$ sono dunque tre equazioni, due almeno delle quali non svaniscono, che rappresentano in π_1 curve della rete omaloidica relativa a T. La (10) si scrive ora

$$x_1\Phi_1 + x_2\Phi_2 + x_3\Phi_3 \equiv 0. \tag{12}$$

Per la discussione svolta in 2., la (12) non potrà essere soddisfatta che se T è una trasformazione di De Jonquières. Osservando ancora che la (10) esprime che T è contenuta in una reciprocità [6] concludiamo che:

Le uniche trasformazioni cremoniane (d'ordine ≥ 4) che siano contenute in una reciprocità sono le trasformazioni di De Jonquières.

4. Consideriamo ora la superficie Σ rappresentativa di T secondo L. Godeaux. Rammentiamo [7] che tale superficie si ottiene sostanzialmente come segue: si considera il sistema lineare completo $|C_1^{n+1}|$, nel piano π_1, delle curve C_1^{n+1} d'ordine $n+1$ che si comportano come le curve della rete, relativa a T, nella base di questa. Tale sistema ha dimensione effettiva $n+4$, come si riconosce mediante considerazione della serie caratteristica. Siano

$$F_i^{(1)} = 0 \qquad (i = 1, \dots, n+5)$$

le equazioni di $n+5$ curve linearmente indipendenti del sistema $|C_1^{n+1}|$ e consideriamo la superficie di $S_{n+4}^{(1)}$, di equazioni parametriche

$$X_i^{(1)} = F_i^{(1)} \qquad (i = 1, \dots, n+5). \tag{13}$$

In modo analogo siano

$$X_i^{(2)} = F_i^{(2)} \qquad (i = 1, \dots, n+5) \tag{14}$$

le equazioni di una superficie di $S_{n+4}^{(2)}$ (sovrapposto ad $S_{n+4}^{(1)}$), ottenuta come la (13) ma a partire dal piano π_2. Le due superficie (13) e (14) sono, ciascuna, in corrispondenza biunivoca senza ecce-

[6] Si dice che una trasformazione è contenuta in una reciprocità quando le coppie di punti corrispondenti sono coppie di punti coniugati in una reciprocità.

[7] Si veda il lavoro citato in [1].

zioni con il piano dal quale provengono e il GODEAUX ha mostrato come esse possano farsi coincidere, omograficamente, in una unica superficie Σ, ciascun punto della quale rappresenta allora una coppia di punti dei piani π_1 e π_2 che si corrispondono in T. È chiaro che si possono ancora assumere le (13) come equazioni di Σ in S_{n+4} (a meno di una omografia); è allora immediato dimostrare che: *proiettando opportunamente* Σ *da un* S_{n-5} *su di un* S_8 *(oppure da un* S_{n-4} *su di un* S_7, *se* T *è una trasformazione di De Jonquiéres) si ottiene la superficie* Σ_T *rappresentiva della trasformazione* T *sulla* V_4^6 *di C. Segre.*

Infatti, poichè le nove curve, del piano π_1, di equazioni

$$x_i\varphi_j = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{15}$$

appartengono manifestamente al sistema $|C_1^{n+1}|$, si potranno esprimere le (15) come combinazioni lineari delle $F_i^{(1)} = 0$

$$x_i\varphi_j \equiv \sum_{r=1}^{n+5} \mu_r^{(ij)} F_r^{(1)} \qquad (i, j = 1, 2, 3). \tag{16}$$

Sia > 4 l'ordine della trasformazione T, e supponiamo non si tratti di una trasformazione di DE JONQUIERES, allora, in base ai nn. 1 e 2, non intercorre nessuna dipendenza lineare fra i nove S_{n+3} di equazioni

$$\sum_{r=1}^{n+5} \mu_r^{(ij)} X_r^{(1)} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3). \tag{17}$$

Assunto l'S_{n-5} definito dalle (17) come S_{n-5} fondamentale di un nuovo riferimento nel quale esso abbia le equazioni

$$X_k' = 0 \qquad (k = 1, \dots, 9) \tag{18}$$

è subito visto che Σ_T si ottiene proiettando Σ dall'S_{n-5} (18) sull'S_8 di equazioni

$$X_k' = 0 \qquad (k = 10, \dots, n+5).$$

In modo analogo si ragiona nel caso delle trasformazioni di DE JONQUIÉRES [8].

5. Consideriamo, fra due piani π_1 e π_2, una trasformazione puntuale T tale che uno dei tre sistemi di curve caratteristiche sia, in ciascuno dei due piani, un fascio di rette e si corrispondano le rette dei due fasci in una proiettività subordinata da T [9]. Con

[8] Per le trasformazioni T, d'ordine $n < 4$, si veda: VILLA, op. cit. in [2].

[9] Si veda per tali trasformazioni e per i tre sistemi di curve caratteristiche il lavoro: M. VILLA e G. VAONA, *Alcune osservazioni sulle curve caratteristiche delle trasformazioni cremoniane.* « Boll. U. M. I. ». Ser. III, Vol. V, 1950, pp. 101-108.

una opportuna scelta dei riferimenti nei due piani, le equazioni di T, in coordinate proiettive non omogenee, possono ridursi a

$$(19) \qquad \begin{cases} x' = x \\ y' = \varphi(x, y) \end{cases}$$

x', y' essendo le coordinate in π_2, x, y le coordinate in π_1. I centri dei due fasci di rette-curve caratteristiche sono i punti impropri P, P' degli assi Oy, Oy' rispettivamente. Ora la superficie Σ_T rappresentativa sulla V_4^6 di C. SEGRE della T ha equazioni parametriche

$$(20) \qquad \begin{gathered} X_{11} = x^2, \quad X_{12} = x\varphi, \quad X_{13} = x, \quad X_{21} = xy, \quad X_{22} = y\varphi, \\ X_{23} = y, \quad X_{31} = x, \quad X_{32} = \varphi, \quad X_{33} = 1 \end{gathered}$$

e si vede immediatamente che Σ_T appartiene all' S_7 di equazioni

$$X_{13} = X_{31}$$

che è tangente alla V_4^6 nel punto rappresentativo della coppia (P, P').

Viceversa, consideriamo una trasformazione puntuale T di equazioni

$$(21) \qquad \begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = \varphi(x, y) \end{cases}$$

e la relativa superficie Σ_T, di equazioni

$$(22) \qquad \begin{gathered} X_{11} = xf, \quad X_{12} = x\varphi, \quad X_{13} = x, \quad X_{21} = yf, \quad X_{22} = y\varphi \\ X_{23} = y, \quad X_{31} = f, \quad X_{32} = \varphi, \quad X_{33} = 1 \end{gathered}$$

Supponiamo che Σ_T appartenga ad un S_7 tangente alla V_4^6; ad esempio ad uno degli S_7 tangenti nel punto rappresentativo della coppia di punti impropri di Oy, $O'y'$. Tali S_7 hanno equazione

$$\lambda_1 X_{11} + \lambda_2 X_{13} + \lambda_3 X_{31} + \lambda_4 X_{33} = 0.$$

Si dovrà dunque avere l'identità

$$\lambda_1 xf + \lambda_2 x + \lambda_3 f + \lambda_4 \equiv 0,$$

ossia

$$f = -\frac{\lambda_2 x + \lambda_4}{\lambda_1 x + \lambda_4}.$$

La equazioni di T si riducono dunque ad

$$(23) \qquad \begin{cases} x' = -\dfrac{\lambda_2 x + \lambda_4}{\lambda_2 x + \lambda_3} \\ y' = \varphi(x, y) \end{cases}$$

e queste, col cambiamento di riferimento in π_2, (supposto $\lambda_3\lambda_2 - \lambda_1\lambda_4 \neq 0$) [10]

$$X = -\frac{\lambda_3 x' + \lambda_4}{\lambda_1 x' + \lambda_2}, \qquad Y = \frac{y'}{\lambda_1 x' + \lambda_2}$$

si riducono alla forma

$$\begin{cases} X = x \\ Y = \varphi_1(x, y) \end{cases}$$

e pertanto T è del tipo indicato nel primo capoverso di questo n. 5. Sicchè le trasformazioni T di quel tipo sono le uniche la cui superficie rappresentativa sulla V_4^6 appartiene ad uno S_7 tangente alla varietà. A questa conclusione si può anche pervenire tenendo presente che l'appartenenza ad un S_7 tangente della superficie rappresentativa di una trasformazione T equivale all'appartenenza di T ad una reciprocità degenere [11].