Letterio Toscano

Gli integrali ellittici completi di prima e seconda specie nel calcolo simbolico

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.3-4, p. 236–238.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_3-4_236_0>

Gli integrali ellittici completi di prima e seconda specie nel calcolo simbolico.

Nota di LETTERIO TOSCANO (a Messina).

Sunto. - *Si assegnano due formule di calcolo simbolico su gli integrali ellittici completi di prima e seconda specie.*

1. Gli integrali ellittici completi di prima e seconda specie sono, come è noto,

$$K(\varepsilon) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

$$\varepsilon^2 < 1$$

$$E(\varepsilon) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}\, d\varphi;$$

e con la funzione ipergeometrica di GAUSS sono pure dati da

$$K(\varepsilon) = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \varepsilon^2\right)$$

$$E(\varepsilon) = \frac{\pi}{2} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \varepsilon^2\right).$$

(10) Se fosse $\lambda_3\lambda_2 - \lambda_1\lambda_4 = 0$ sarebbe T una trasformazione degenere, com'è subito visto.

(11) Si veda: M. VILLA, op cit. in (2).

D'altra parte vale la trasformazione di LAPLACE

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} x^{\alpha-1} {}_1F_1(\beta;\ \gamma;\ \nu x)dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha} F\left(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ \frac{\nu}{\lambda}\right).$$

Facciamo in questa $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$. Si ha

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} x^{-\frac{1}{2}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2};\ 1;\ \nu x\right)dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\lambda^{\frac{1}{2}}} F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ 1,\ \frac{\nu}{\lambda}\right),$$

e con l'integrale K

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} x^{-\frac{1}{2}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2};\ 1;\ \nu x\right)dx = \frac{2}{\sqrt{\pi\lambda}} K\left(\sqrt{\frac{\nu}{\lambda}}\right).$$

E poichè (KUMMER)

$${}_1F_1\left(\frac{1}{2};\ 1;\ \nu x\right) = e^{\frac{\nu x}{2}} J_0\left(\frac{i\nu x}{2}\right) = e^{\frac{\nu x}{2}} I_0\left(\frac{\nu x}{2}\right),$$

segue

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} x^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\nu x}{2}} I_0\left(\frac{\nu x}{2}\right) dx = \frac{2}{\sqrt{\pi\lambda}} K\left(\sqrt{\frac{\nu}{\lambda}}\right). \tag{1}$$

Con le note posizioni di Calcolo simbolico

$$f(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} F(x)dx = L[F(x)]$$

si può anche scrivere

$$L\left[x^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\nu x}{2}} I_0\left(\frac{\nu x}{2}\right)\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi\lambda}} K\left(\sqrt{\frac{\nu}{\lambda}}\right). \tag{1'}$$

Facendo invece, in partenza, $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$, si ottengono gli analoghi risultati

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} x^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{\nu x}{2}} I_0\left(\frac{\nu x}{2}\right) dx = -4\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} E\left(\sqrt{\frac{\nu}{\lambda}}\right) \tag{2}$$

$$L\left[x^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{\nu x}{2}} I_0\left(\frac{\nu x}{2}\right)\right] = -4\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} E\left(\sqrt{\frac{\nu}{\lambda}}\right). \tag{2'}$$

Le (1′) e (2′) sono delle semplicissime formule che esprimono — a meno di un fattore — gli integrali ellittici completi di prima e seconda specie quali trasformate di LAPLACE di funzioni in cui intervengono la esponenziale e quella di BESSEL di indice zero e d'argomento immaginario (¹).

(¹) Le (1′) e (2′) sembrano più semplici di quelle riportate in recenti formulari di Calcolo simbolico: cfr. N. W. MC LACHLAN et P. HUMBERT, *For-*

2. Esse si prestano facilmente per la ricerca delle proprietà degli integrali K ed E. E ne ritroviamo qui qualcuna tra le più note.

Nella (1) facciamo prima $\lambda = 1$, $\nu \equiv \nu^2$, e poi $\lambda \equiv \lambda^2$, $\nu \equiv -\nu^2$. Abbiamo

$$\int_0^\infty e^{-x+\frac{\nu^2 x}{2}} x^{-\frac{1}{2}} I_0\left(\frac{\nu^2 x}{2}\right) dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} K(\nu)$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda^2 x} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\nu^2 x}{2}} I_0\left(\frac{-\nu^2 x}{2}\right) dx = \frac{2}{\lambda\sqrt{\pi}} K\left(\frac{i\nu}{\lambda}\right).$$

Questa, con $\lambda^2 + \nu^2 = 1$, si può scrivere

$$\int_0^\infty e^{-x+\frac{\nu^2 x}{2}} x^{-\frac{1}{2}} I_0\left(\frac{-\nu^2 x}{2}\right) dx = \frac{2}{\lambda\sqrt{\pi}} K\left(\frac{i\nu}{\lambda}\right),$$

e confrontando con la precedente si ottiene

$$K\left(\frac{i\nu}{\lambda}\right) = \lambda K(\nu) \qquad (\lambda^2 + \nu^2 = 1).$$

Analogamente si perviene all'altra

$$E\left(\frac{i\nu}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} E(\nu) \qquad (\lambda^2 + \nu^2 = 1).$$

Applicando ora la proprietà

$$\frac{d}{d\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x} F(x) dx = -\int_0^\infty e^{-\lambda x} x F(x) dx$$

alla funzione

$$F(x) = x^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{\nu x}{2}} I_0\left(\frac{\nu x}{2}\right),$$

si ha

$$\frac{d}{d\lambda}\left[-4\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} E\left(\sqrt{\frac{\nu}{\lambda}}\right)\right] = -\frac{2}{\sqrt{\pi\lambda}} K\left(\sqrt{\frac{\nu}{\lambda}}\right)$$

da cui

$$\frac{d}{d\lambda} E\left(\sqrt{\frac{\nu}{\lambda}}\right) = \frac{1}{2\lambda}\left[K\left(\sqrt{\frac{\nu}{\lambda}}\right) - E\left(\sqrt{\frac{\nu}{\lambda}}\right)\right].$$

E ponendo $\lambda = \frac{\nu}{p^2}$ segue

$$p\,\frac{dE(p)}{dp} = E(p) - K(p).$$

mulaire pour le calcul symbolique, « Mémorial des Sciences Mathématiques », fasc. C. Paris, 1941; A. Ghizzetti, *Calcolo simbolico*, Bologna, 1943; G. Doetsch, *Tabellen zur Laplace-transformation*. Berlin, 1947.