
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

PIERO POZZATI

**Sulla risoluzione, in serie semplice, della
lastra rettangolare appoggiata, sottoposta
a un carico o a una coppia concentrati in
un punto qualunque**

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 5
(1950), n.3-4, p. 239-247.

Zanichelli

http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_3-4_239_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sulla risoluzione, in serie semplice, della lastra rettangolare appoggiata, sottoposta a un carico o a una coppia concentrati in un punto qualunque.

Nota di PIERO POZZATI (a Bologna).

Sunto. - Viene dedotta, in modo semplice, la soluzione della lastra rettangolare appoggiata, soggetta a un carico concentrato. Il modo di procedere si presta allo studio rapido di altre condizioni di vincolo e di carico.

1. La risoluzione della lastra rettangolare appoggiata lungo tutto il contorno, sottoposta all'azione di un carico concentrato comunque disposto, è importante perchè può essere esaminata ogni altra condizione di vincolo della lastra (sommando ad essa una seconda deformata per effetto di una opportuna distribuzione di forze e di coppie lungo il contorno) e perchè, mediante integrazione, possono essere studiate condizioni di carico qualsiasi.

In generale la soluzione in serie semplice è ricavata partendo dall'esame provvisorio della lastra composta di tre strisce: le laterali scariche e la centrale gravata da una forza distribuita secondo una retta trasversale. Facendo poi tendere a zero la larghezza della striscia centrale, si ha la possibilità di passare dalla condizione di carico distribuito lungo un tratto rettilineo alla condizione di carico concentrato ⁽¹⁾.

Naturalmente nella prima situazione fittizia di tre strisce debbono essere determinate le espressioni delle dodici costanti (quattro per ogni striscia) relative alle espressioni delle tre superficie ela-

(¹) Vari Autori si sono occupati della soluzione della lastra rettangolare soggetta a un carico concentrato. Si veda ad esempio S. TIMOSHENKO, *Theory of plates and shells*, par. 33 con la relativa bibliografia (tale Autore parte dalla soluzione, data da B. G. GALERKIN, della lastra divisa in tre strisce delle quali la centrale caricata con legge qualsiasi, e passa successivamente al limite: viene però esaminato solamente il caso del carico applicato lungo le mediane); la soluzione in serie semplice generale, però un poco complessa nella forma, è riportata senza dimostrazione da M. BERGSTRÄSSER, *Forschungsarbeiten*, H. 302, par. 5, Berlin, 1928; una dimostrazione è stata data da O. ZANABONI, « *Annali di Mat. pura e appl.* », serie IV, t. XIX, 1940 (la soluzione generale è ottenuta partendo ancora dallo studio della lastra divisa in tre strisce; nella Memoria è svolta anche la discussione sulla convergenza delle varie serie esprimenti le caratteristiche geometriche e statiche della superficie deformata).

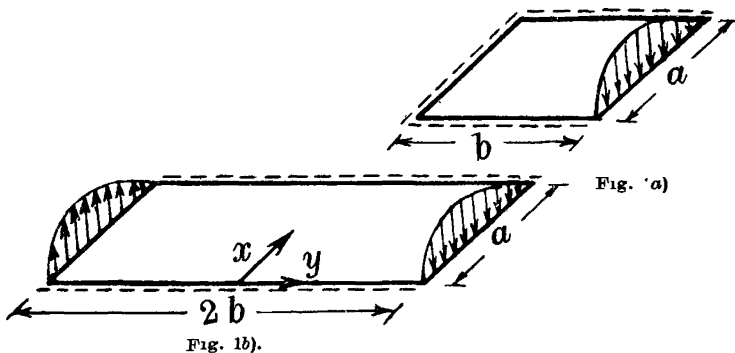
stiche. Determinate queste, si ha poi la possibilità del passaggio al limite, come è stato detto.

La presente nota ha lo scopo modesto di dimostrare che la stessa soluzione può essere ottenuta procedendo in modo molto più semplice e del tutto analogo al metodo che si impiega per ricavare l'espressione della linea elastica della trave appoggiata alle estremità e soggetta a un carico concentrato.

Le costanti di integrazione sono soltanto quattro e la determinazione dell'espressione della superficie elastica è diretta; il modo di procedere è inoltre utile perchè può essere impiegato nell'esame di vari altri casi di carico e di vincolo e perchè fa rientrare anche tali studi particolari nei metodi classici della Scienza delle costruzioni, più familiari e semplici.

2. Vengono premesse alcune osservazioni che permettono di procedere poi con maggiore semplicità.

La lastra della figura 1a) avente tre lati appoggiati e sottoposta a forze e coppie comunque distribuite lungo il quarto lato libero,



è, per ragioni di antisimmetria, nella stessa situazione della lastra della figura 1b) di uguale larghezza a e di lunghezza doppia, con due lati opposti appoggiati e gli altri due liberi e soggetti alla distribuzione, antisimmetrica rispetto all'asse x , delle stesse coppie e forze.

Questa osservazione permette di concludere che conviene trasferire lo studio del caso della figura 1a) a quello della figura 1b), perchè per questo l'integrale generale dell'equazione omogenea della superficie elastica ha solo i termini antisimmetrici (che cioè cambiano di segno quando cambia il segno della variabile); ossia l'espressione della superficie elastica, essendo nullo l'integrale particolare per la presenza di sole forze al contorno, contiene solamente due costanti invece di quattro, ed è del tipo

$$a) \quad w = \sum_n (C_n \sinh a_n y + D_n a_n y \cosh a_n y) \sin a_n x,$$

con $a_n = n\pi/a$; le costanti C_n e D_n sono determinate dalle condizioni ai limiti.

Le distribuzioni di forze e di coppie, se si annullano agli estremi, possono essere sempre rappresentate da serie di seni; in particolare, un carico concentrato alla distanza c dall'origine, essendo a la lunghezza dell'intervallo, può essere dato dalla serie

$$b) \quad \sum_n \frac{2P}{a} \text{sen } \gamma_n \text{sen } a_n x, \quad \text{con} \quad \gamma_n = n\pi c/a.$$

3. Sia data la lastra della figura 2) di lati a e b , soggetta nel punto A al carico P .

Tagliamo la lastra lungo la retta r parallela all'asse x , passante per A : si ottengono così due lastre che distinguiamo con gli indici 1 e 2, la 1 di lati a, e , la 2 di lati a, d . Per entrambe la superficie elastica ha la forma data dalla relazione a) per quanto è stato detto nel paragrafo precedente, e per ciascuna si ha un'origine di assi cartesiani distinta, posta sul lato opposto al lato r . Si ha così per le due parti

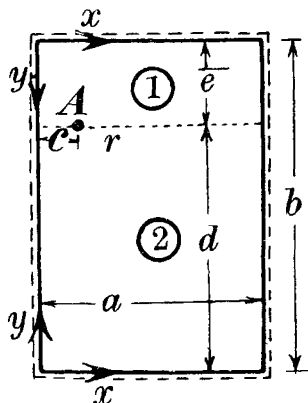


Fig. 2.

$$w_1 = \sum_n (C_n' \text{senh } a_n y + D_n' a_n y \cosh a_n y) \text{sen } a_n x,$$

$$w_2 = \sum_n (C_n'' \text{senh } a_n y + D_n'' a_n y \cosh a_n y) \text{sen } a_n x,$$

con n intero, variabile da 1 a ∞ .

Indichiamo ora le quattro condizioni che determinano le quattro costanti C_n', D_n', C_n'', D_n'' .

Si deve fare in modo ora di saldare le due parti ottenute con la sezione lungo r , ossia, per $y = e$ per la parte 1 e per $y = d$ per la parte 2, deve aversi ⁽²⁾:

a) uguaglianza di abbassamenti, cioè

$$w_1 = w_2$$

⁽²⁾ Per determinare la "linea elastica di una trave appoggiata alle estremità, soggetta a un carico concentrato P , si opera una sezione in corrispondenza del carico e si introducono poi le due condizioni limiti che determinano le due costanti d'integrazione. Queste sono soltanto due perchè non sono richieste le condizioni di somma dei momenti uguale a zero e somma dei tagli uguale a P , le quali sono già riposte nelle espressioni correnti del momento e del taglio.

b) uguaglianza di rotazioni, ossia

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_1 = -\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_2$$

c) uguaglianza di momenti

$$-B\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_1 = -B\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_2$$

d) infine, la somma delle reazioni uguali al carico sviluppato in serie di seni, quindi

$$\begin{aligned} -B\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2 - \nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y}\right]_1 - B\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2 - \nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y}\right]_2 &= \\ = \sum_n \frac{2P}{a} \operatorname{sen} \gamma_n \operatorname{sen} \alpha_n x. \end{aligned}$$

Sviluppando le semplici operazioni di derivazione indicate, posto

$$\frac{n\pi e}{a} = \eta_n, \quad \frac{n\pi d}{a} = \delta_n, \quad \frac{n\pi c}{a} = \gamma_n, \quad \frac{n\pi b}{a} = 2\varphi_n,$$

le quattro condizioni sono:

$$C_n' \operatorname{senh} \eta_n + D_n' \eta_n \cosh \eta_n = C_n'' \operatorname{senh} \delta_n + D_n'' \delta_n \cosh \delta_n,$$

$$\begin{aligned} C_n' \cosh \eta_n + D_n' \cosh \eta_n + D_n' \eta_n \operatorname{senh} \eta_n &= -C_n'' \cosh \delta_n - \\ - D_n'' \cosh \delta_n - D_n'' \delta_n \operatorname{senh} \delta_n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 - \nu)C_n' \operatorname{senh} \eta_n + 2D_n' \operatorname{senh} \eta_n + (1 - \nu)D_n' \eta_n \cosh \eta_n &= \\ = (1 - \nu)C_n'' \operatorname{senh} \delta_n + 2D_n'' \operatorname{senh} \delta_n + (1 - \nu)D_n'' \delta_n \cosh \delta_n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -B \frac{n^3 \pi^3}{a^3} \left[- (1 - \nu)C_n' \cosh \eta_n + (1 + \nu)D_n' \cosh \eta_n - \right. \\ \left. - (1 - \nu)D_n' \eta_n \operatorname{senh} \eta_n - (1 - \nu)C_n'' \cosh \delta_n + (1 + \nu)D_n'' \cosh \delta_n - \right. \\ \left. - (1 - \nu)D_n'' \delta_n \operatorname{senh} \delta_n \right] = \frac{2P}{a} \operatorname{sen} \gamma_n. \end{aligned}$$

Sottraendo la prima moltiplicata per $(1 - \nu)$ dalla terza e sommando la quarta con la seconda moltiplicata per $(1 - \nu)$, si ottiene più semplicemente

$$D_n' \operatorname{senh} \eta_n - D_n'' \operatorname{senh} \delta_n = 0$$

$$D_n' \cosh \eta_n + D_n'' \cosh \delta_n = -\frac{Pa^2}{Bn^3 \pi^3} \operatorname{sen} \gamma_n$$

$$C_n' \operatorname{senh} \eta_n - C_n'' \operatorname{senh} \delta_n = -D_n' \eta_n \cosh \eta_n + D_n'' \delta_n \cosh \delta_n$$

$$(C_n' + D_n') \cosh \eta_n + D_n' \eta_n \operatorname{senh} \eta_n = -(C_n'' + D_n'') \cosh \delta_n + D_n'' \delta_n \operatorname{senh} \delta_n.$$

Il sistema è stato così diviso in due sistemi dei quali il primo nelle due sole incognite D_n' e D_n'' . Ricaviamo e poi sostituiamo

queste nel secondo sistema, il quale si riduce così nelle due sole incognite C_n' e C_n'' .

In definitiva, le espressioni delle superficie elastiche delle due parti sono quindi, come è stato detto,

$$(1) \quad \begin{aligned} w_1 &= \sum_n (C_n' \operatorname{senh} a_n y + D_n' a_n y \cosh a_n y) \operatorname{sen} a_n x, \\ w_2 &= \sum_n (D_n'' \operatorname{senh} a_n y + D_n'' a_n y \cosh a_n y) \operatorname{sen} a_n x, \end{aligned}$$

e le espressioni delle costanti sono $\left(\delta_n = \frac{n\pi d}{a}, \gamma_n = \frac{n\pi e}{a}, \varphi_n = \frac{n\pi b}{2a}, \right.$
 $\left. \gamma_n = \frac{n\pi c}{a}, a_n = \frac{n\pi}{a} \right)$

$$(2) \quad \begin{aligned} C_n' &= \frac{Pa^2 \operatorname{sen} \gamma_n}{B \pi^3 n^3} [(2\varphi_n \coth 2\varphi_n + 1) \operatorname{senh} \delta_n - \delta_n \cosh \delta_n] : \operatorname{senh} 2\varphi_n \\ D_n' &= -\frac{Pa^2 \operatorname{sen} \gamma_n}{B \pi^3 n^3} \operatorname{senh} \delta_n : \operatorname{senh} 2\varphi_n \\ C_n'' &= \frac{Pa^2 \operatorname{sen} \gamma_n}{B \pi^3 n^3} [(2\varphi_n \coth 2\varphi_n + 1) \operatorname{senh} \eta_n - \eta_n \cosh \eta_n] : \operatorname{senh} 2\varphi_n \\ D_n'' &= -\frac{Pa^2 \operatorname{sen} \gamma_n}{B \pi^3 n^3} \operatorname{senh} \eta_n : \operatorname{senh} 2\varphi_n. \end{aligned}$$

Nel caso di distribuzione generica di forze $\sum_n F_n \operatorname{sen} a_n x$ lungo la retta r , le relazioni 1 e 2 sono ancora valide, purchè nelle espressioni delle costanti si sostituisca $\frac{2P}{a} \operatorname{sen} \gamma_n$ con F_n .

La validità esula quindi dall'esame del caso particolare del carico concentrato.

Le ampiezze F_n sono poi determinate facilmente dalla teoria delle serie di FOURIER.

4. Come è stato detto, si risolvono con semplicità vari altri casi, procedendo in modo analogo.

Come primo esempio consideriamo la lastra nella fig. 2 sottoposta, lungo la retta r , a una qualsiasi distribuzione di coppie m_y (quindi anche a una coppia concentrata), rappresenta con la serie $\sum_n M_n \operatorname{sen} a_n x$.

Tagliata al solito la lastra lungo la retta r , le condizioni che determinano le quattro costanti sono che, lungo r , si abbia per le due parti 1 e 2 uguaglianza di abbassamenti, uguaglianza di rotazioni, uguaglianza di reazioni, e che, infine, la somma dei momenti sia uguale ai momenti delle coppie applicate.

Procedendo come nel caso già visto, si ricavano le espressioni delle quattro costanti

$$\begin{aligned}
 C_n' &= \frac{M_n a^2}{B} \frac{1}{2\pi^2 n^2} (2\varphi_n \coth 2\varphi_n \cosh \delta_n - \delta_n \sinh \delta_n) : \sinh 2\varphi_n \\
 D_n' &= - \frac{M_n a^2}{B} \frac{1}{2\pi^2 n^2} \cosh \delta_n : \sinh 2\varphi_n \\
 C_n'' &= \frac{M_n a^2}{B} \frac{1}{2\pi^2 n^2} (2\varphi_n \coth 2\varphi_n \cosh \eta_n - \eta_n \sinh \eta_n) : \sinh 2\varphi_n \\
 D_n'' &= - \frac{M_n a^2}{B} \frac{1}{2\pi^2 n^2} \cosh \eta_n : \sinh 2\varphi_n.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Naturalmente per le due parti separate dalla retta r le espressioni delle superficie elastiche sono ancora

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \sum_n (C_n' \sinh a_n y + D_n' a_n y \cosh a_n y) \sin a_n x \\
 v_2 &= \sum_n (C_n'' \sinh a_n y + D_n'' a_n y \cosh a_n y) \sin a_n x.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Si verifica immediatamente che le espressioni (3) delle costanti si ottengono dalle relazioni (2) mediante derivazione (3).

Il valore di M_n varia col variare del tipo di distribuzione. Ad esempio, per distribuzione uniforme m_0 di coppie o per una coppia concentrata M

$$M_n = \frac{4m_0}{n\pi}, \quad M_n = \frac{2M}{a} \sin \gamma_n.$$

5. Quando la retta r coincide con uno dei lati, ossia i momenti sono distribuiti lungo uno dei due lati esterni ad esempio quello della parte 2 parallelo all'asse x , si ha, essendo in tale caso valida solo la superficie elastica v_1 ed essendo $\delta_n = 0$ perchè è $d = 0$ (4),

$$w = v_1 = \frac{a^2}{2\pi^2 B} \sum_n \frac{M_n}{n^2 \sinh 2\varphi_n} (2\varphi_n \coth 2\varphi_n \sinh a_n y - a_n y \cosh a_n y) \sin a_n x.$$

(3) Questa proprietà è di dimostrazione molto semplice pensando la coppia 1 come il risultato di due carichi uguali verticali, di senso opposto, con braccio $\Delta\eta$ piccolissimo, d'intensità $1/\Delta\eta$. Se $f(\eta)$ è l'espressione di una delle due costanti presenti nella soluzione data, relativa a un carico concentrato $P=1$, per effetto della coppia, cioè delle due forze vicinissime d'intensità $1/\Delta\eta$, l'espressione della stessa costante diventa $1/\Delta\eta [f(\eta + \Delta\eta) - f(\eta)]$, quindi, passando al limite, $f'(\eta)$. Tale risultato si trova in: A. NÁDAL, *Elastische Platten*, cap. II, par. 40, Berlin, Springer, 1925.

(4) Per lo studio di lastre con lati adiacenti incastrati è più utile, anche se meno convergente, la corrispondente soluzione in serie doppia, che si ottiene ancora facilmente dalla soluzione in serie doppia della lastra sottoposta ad un carico concentrato.

Per distribuzione arbitraria di coppie $\sum M_n \sin \frac{m\pi x}{a}$ lungo il lato $y = 0$

6. Comé secondo esempio viene risolta la lastra della fig. 3, che permette ancora di trovare semplicemente e per via diversa la soluzione relativa alla lastra appoggiata, soggetta a un carico concentrato P ; il caso che verrà esaminato sarà inoltre di utile impiego nello studio dei solai a fungo, relativi a edifici che presentino una fronte estesa (5).

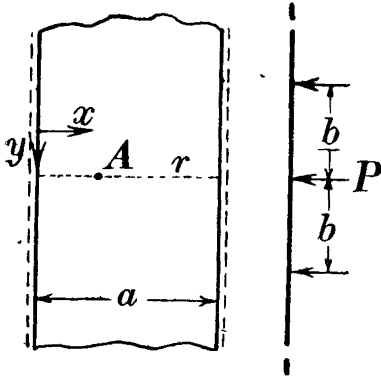


Fig. 3.

Al solito, si seziona la lastra lungo la retta r . Le due parti ottenute sono in tale caso simmetriche (quindi le costanti di integrazione sono soltanto due invece di quattro come nei casi precedenti), inoltre il campo compreso fra carico e carico si trova nella stessa situazione statica dei campi adiacenti.

Pertanto l'equazione della superficie elastica relativa ad esso contiene i soli termini simmetrici, ossia è

$$(5) \quad w = \sum_n (A_n \cosh a_n y + B_n a_n y \sinh a_n y) \sin a_n x \quad (n = 1, 2, 3\dots)$$

Le due condizioni che determinano le due costanti A_n e B_n sono che lungo r , cioè per $y = b/2$, si abbia rotazione $\frac{\partial w}{\partial y}$ nulla e reazione uguale a metà carico sviluppato in serie di seni. Si ottiene così ($\gamma_n = \frac{n\pi c}{a}$, $\alpha_n = \frac{n\pi}{a}$, $\varphi_n = \frac{n\pi b}{2a}$, c è, al solito, la distanza del carico dal lato $x = 0$)

$$(6) \quad A_n = -B_n(1 + \varphi_n \coth \varphi_n), \quad B_n = -\frac{Pa^2}{2B} \frac{\sin \gamma_n}{n^2 \pi^2 \sinh \varphi_n}.$$

(l'origine è in un angolo della lastra), la soluzione è

$$w = \frac{2}{\pi^3 b^2 B} \sum_m \sum_n \frac{n M_m}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Si ha il vantaggio, rispetto alla corrispondente soluzione in serie semplice, che la rotazione φ_x lungo i due lati paralleli dell'asse y è ancora rappresentata da una serie di seni.

Nota tale soluzione, per studiare ad esempio un solaio a fungo caricato uniformemente, di lunghezza infinita nella direzione y , sostenuto da una serie di pilastri, appoggiato lungo i due lati paralleli all'asse y , basta uguagliare l'abbassamento provocato dal carico p (che è lo stesso che si ha per una trave di luce a) all'innalzamento in A provocato dalla reazione incognita P di ognuno dei pilastri. Determinato P si sovrappongono poi gli effetti.

Sostituendo, si ha infine ⁽⁶⁾

$$(7) \quad w = \frac{Pa^2}{2B\pi^2} \sum_n \frac{\text{sen } \gamma_n}{n^2 \text{senh } \varphi_n} [(1 + \varphi_n \coth \varphi_n) \cosh a_n y - a_n y \text{senh } a_n y] \text{sen } a_n x.$$

Come è stato detto, tale soluzione permette di ritrovare la soluzione (1) per via del tutto diversa (7).

Se è data (v. fig. 4a) una lastra di lunghezza infinita, soggetta ai carichi $+P$ distanti fra loro $2b$, con l'origine degli assi posta a distanza e da P stesso (e non a distanza b , cioè a metà della distanza fra carico e carico), la soluzione è ancora la (7) con $d + y$ al posto di y ($d = b - e$) e $2\varphi_n$, al posto di φ_n : infatti basta ricordare che, per la parte 1 della lastra, la nuova origine ha subito rispetto alla precedente la traslazione positiva d . Poi, se pensiamo di avere la stessa lastra sottoposta ai carichi $-P$, sempre distanziati di $2b$, e con l'origine distante d dall'origine solita, come è indicato nella fig. 4b, la soluzione è ancora la (7), cambiata di segno, con $d - y$ al posto di y e $2\varphi_n$ al posto φ_n .

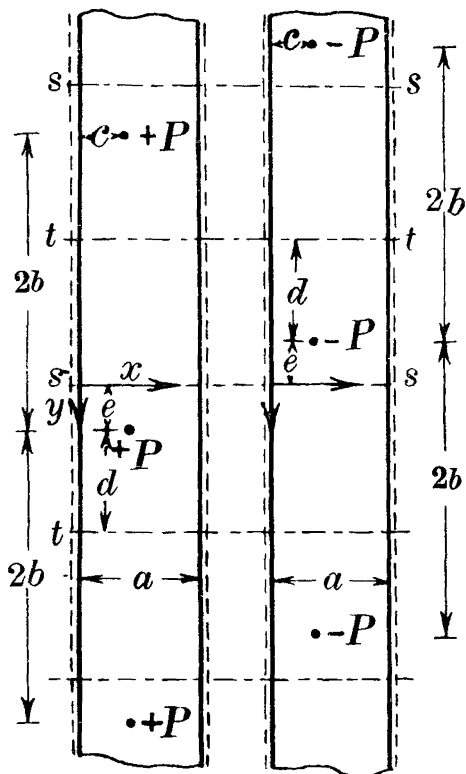


Fig. 4a

Fig. 4b

Le due situazioni sovrapposte realizzano evidentemente la situazione della lastra appoggiata sottoposta a un carico P distante d ed e dai lati: infatti, per ragioni di antisimmetria, lungo le rette s e t gli abbassamenti e i momenti sono nulli.

⁽⁶⁾ Può interessare il confronto dell'abbassamento sotto il carico nel caso in esame (con $b = a$) e nel caso della lastra di lunghezza ancora infinita, soggetta però a un solo carico P (v. ad es.: S. TIMOSHENKO, op. cit., par. 34). Nel primo caso è $f = 0,02320 Pa^2/B$, nel secondo $f = 0,01693 Pa^2/B$, con la differenza del 37% circa.

⁽⁷⁾ È il così detto metodo delle immagini introdotto dal NADAI. Si veda A. NADAI, « Z. angew. Math. Mech. », 1922, vol. 2, pag. 1. È riportato da

Si ha pertanto

$$(8) \quad v = \frac{Pa^2}{2B\pi^2} \sum_n \frac{\text{sen } \gamma_n}{n^3 \text{senh } 2\varphi_n} \\ \{ [(1 + 2\varphi_n \coth 2\varphi_n) \cosh a_n(d + y) - a_n(d + y) \text{senh } a_n(d + y)] - \\ - [(1 + 2\varphi_n \coth 2\varphi_n) \cosh a_n(d - y) - a_n(d - y) \text{senh } a_n(d - y)] \}.$$

Si può verificare molto semplicemente che, sviluppando le relazioni di addizione degli argomenti, la soluzione (8) coincide con la prima delle (1); in modo analogo si ottiene la seconda.