BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

TINO ZEULI

Sulla continuazione analitica delle funzioni associate ai sistemi fisici lineari.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.3-4, p. 247–251.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_3-4_247_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1950.

Sulla continuazione analitica delle funzioni associate ai sistemi fisici lineari.

Nota di TINO ZEULI (a Torino).

Sunto. - *Si ottiene l'espressione della funzione analitica* f(w) *che su un segmento dell'asse immaginario assume valori prefissati, servendosi della rappresentazione conforme del piano* w, *tagliato lungo tale segmento, su un cerchio. Si precisano inoltre le condizioni a cui devono soddisfare i valori prefissati affinchè sia assicurata l'esistenza di tale funzione.*

1. Il prof. G. ZIN in una Nota recente (1), considerando l'effetto di un dato agente su un sistema fisico lineare, rappresentato da una funzione del tempo della forma $f(i\omega)e^{i\omega t}$, ove il coefficiente complesso $f(i\omega)$ dipende dalla sola variabile reale ω (pulsazione), ritenendo la $f(i\omega)$ nota, ad esempio mediante *rilievo sperimentale*, in un intervallo (ω_1, ω_2) della variabile ω, si propone di determinare il valore di $f(i\omega)$ in un punto arbitrario esterno al detto intervallo, nulla sapendo della struttura del sistema fisico lineare.

L'Autore considera per questo una funzione analitica $f(\alpha + i\omega)$, che chiama *associata* al sistema fisico lineare, olomorfa in un campo C della variabile complessa $w = \alpha + i\omega$, contenente il semi-

S. TIMOSHENKO, op. cit., par. 34 ed è impiegato per ritrovare i risultati relativi alla lastra appoggiata lungo tutto il contorno; tali risultati sono però ottenuti partendo dalla soluzione della lastra di lunghezza infinita, soggetta a un solo carico P. È necessario pertanto sovrapporre gli effetti fino allo smorzamento.

(1) G. ZIN, *La continuazione*... (« Nuovo Cimento », vol. VI, n. 6, pag. 531).

piano $\alpha \geq 0$ ed il punto all'infinito, la quale risulta nota sul segmento rettilineo dell'asse immaginario compreso fra i punti di affissa $i\omega_1$, $i\omega_2$. Procede quindi alla determinazione del valore di $f(w)$ in un punto generico dell'asse immaginario servendosi della rappresentazione conforme del semipiano $\alpha \geq 0$ della variabile w sul campo interno ad un semicerchio γ, di raggio unitario e centro nell'origine del piano $z = x + iy$ e in modo che: al segmento considerato dell'asse immaginario del piano w corrisponda la semicirconferenza di γ, alla rimanente parte di quell'asse corrisponda il diametro di γ posto sull'asse reale x, ed al punto all'infinito del piano w il centro di γ. In base alle proprietà delle funzioni olomorfe e continue in un dominio assegnato, dalla conoscenza dei valori della funzione f sul contorno circolare di γ deduce infine il valore della funzione f in un punto del diametro come *limite di una successione di integrali di polinomi approssimati di* STIELTJES.

A prescindere dalle condizioni che devono essere verificate per l'esistenza di quella funzione, [condizioni che devono essere prese in esame, specialmente quando i valori assegnati sul segmento $(i\omega_1, i\omega_2)$ provengono da un rilievo sperimentale e che se non sono verificate rendono illusorio il risultato] il procedimento seguito dallo ZIN, oltre ad essere un po' laborioso, lascia ancora incerti sull'approssimazione che si raggiunge. In questa Nota mi propongo di rilevare come, nel caso in cui i dati siano tali per cui la funzione $f(w)$ esista in tutto il piano w, essa si ottenga rapidamente in modo rigoroso servendosi della formula di CAUCHY e della formula di SCHWARZ relative al cerchio, mediante la rappresentazione conforme del piano della variabile $w = \alpha + i\omega$, tagliato lungo il segmento $(i\omega_1, i\omega_2)$ dell'asse immaginario, sopra un cerchio. Dopo ciò deduco, del pari rapidamente, le condizioni a cui devono soddisfare i valori assegnati della funzione $f(\alpha + i\omega)$ sopra il segmento $(i\omega_1, i\omega_2)$ dell'asse immaginario e che assicurano la sua esistenza nel campo considerato.

2. Ponendo

$$\zeta = \frac{-2iw}{\omega_2 - \omega_1} - \frac{\omega_2 + \omega_1}{\omega_2 - \omega_1} \tag{1}$$

il campo C costituito dal piano della variabile complessa $w = \alpha + i\omega$, tagliato lungo il segmento dell'asse immaginario w compreso fra i punti di affissa $i\omega_1$, $i\omega_2$ $(\omega_2 > \omega_1)$, risulta rappresentato conformemente sul piano della variabile complessa $\zeta = \xi + i\eta$, tagliato lungo il segmento dell'asse reale ξ compreso fra i punti di ascissa $\xi = -1$ e $\xi = +1$.

Ponendo ancora

$$(2)\qquad \zeta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

e quindi

$$(3)\qquad w = \frac{1}{4}\, i(\omega_2 - \omega_1)\left(z + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2}\, i(\omega_1 + \omega_2),$$

il campo C viene ad essere rappresentato conformemente sul campo Γ interno al cerchio di raggio unitario con centro nell'origine del piano complesso $z = x + iy$, in modo che al bordo del taglio posto dalla parte del semipiano $\alpha > 0$ corrisponde la semicirconferenza del semipiano $y > 0$, ed al bordo del taglio posto dalla parte del semipiano $\alpha < 0$ corrisponde la semicirconferenza $y < 0$. Infine al punto all'infinito del piano w corrisponde il centro del cerchio. La trasformazione inversa della (3) risulta:

$$(3')\qquad z = \frac{-2iw}{\omega_2 - \omega_1} - \frac{\omega_2 + \omega_1}{\omega_2 - \omega_1} + \frac{2i}{\omega_2 - \omega_1}\sqrt{(w - i\omega_1)(w - i\omega_2)}\,,$$

ove la radice si determina con la condizione che su entrambi i bordi del taglio l'argomento di $w - i\omega_1$ valga $\pi/2$, mentre l'argomento di $w - i\omega_2$ varia da $-\pi/2$ a $3\pi/2$ passando dal bordo posto dalla parte del semipiano $\alpha > 0$ all'altro.

Con questa rappresentazione i valori $f(i\omega)$ assegnati per la funzione $f(\alpha + i\omega)$ sul segmento $(i\omega_1, i\omega_2)$ dell'asse immaginario, e sdoppiati mediante il taglio, vengono riportati sul contorno del cerchio Γ, e precisamente, posto $z = e^{i\sigma}$, con $0 \leq \sigma \leq 2\pi$, sopra Γ si ha

$$f(i\omega) = f\left[\frac{1}{2}\, i(\omega_2 - \omega_1)\cos\sigma + \frac{1}{2}\, i(\omega_1 + \omega_2)\right].$$

La questione proposta è allora ridotta a determinare una funzione di variabile complessa $F(z)$, olomorfa nell'interno del cerchio Γ, essendo noti i valori

$$F(e^{i\sigma}) = f\left[\frac{1}{2}\, i(\omega_2 - \omega_1)\cos\sigma + \frac{1}{2}\, i(\omega_1 + \omega_2)\right]$$

sul contorno circolare. Essa è data dalla nota formula di CAUCHY:

$$(4)\qquad F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{F(t)}{t - z}\, dt,$$

ove l'integrale è esteso al contorno s del cerchio Γ sul quale è $t = e^{i\sigma}$, con $0 \leq \sigma \leq 2\pi$.

Avendo riguardo alla (3) abbiamo allora

$$
\begin{aligned}
F(z) &\equiv f\left[\frac{1}{4} i(\omega_2 - \omega_1)\left(z + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2} i(\omega_1 + \omega_2)\right] = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left[\frac{1}{2} i(\omega_2 - \omega_1)\cos\sigma + \frac{1}{2} i(\omega_1 + \omega_2)\right]\frac{e^{i\sigma}}{e^{i\sigma} - z}\,d\sigma
\end{aligned}
\tag{5}
$$

e dopo ciò, mediante la (3'), abbiamo la funzione $f(w)$, cercata, in ogni punto del piano tagliato $w = \alpha + i\omega$.

3. Osserviamo, ora, che se si pone

$$F(x) = \varphi + i\psi,$$

ove, sul contorno del cerchio Γ, sono φ, ψ funzioni dell'arco σ, mediante la nota formula di SCHWARZ, che dà il valore di una funzione di variabile complessa entro un cerchio espresso mediante i valori della sua parte reale, o della sua parte immaginaria, sul contorno, si ha:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\sigma)\frac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z}\,d\sigma + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\sigma)d\sigma,$$

oppure

$$F(z) = \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\sigma)\frac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z}\,d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)d\sigma,$$

dalle quali, sommando e dividendo quindi per due, si ha la formula di CAUCHY.

Dall'eguaglianza dei secondi membri si deduce invece che per ogni valore di z interno al cerchio Γ deve essere identicamente

$$\int_0^{2\pi}\frac{\varphi - i\psi}{e^{i\sigma} - z}\,d\sigma = 0;$$

ma per z interno al cerchio Γ è $|z/e^{i\sigma}| < 1$, perciò sviluppando in serie di TAYLOR del rapporto $z/e^{i\sigma}$ ed uguagliando a zero i coefficienti delle diverse potenze di z, si ha

$$\int_0^{2\pi}(\varphi - i\psi)e^{-(n+1)i\sigma}d\sigma = 0, \qquad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots),$$

ovvero, cambiando i in $-i$,

$$\int_s F(z)\, z^n dz = 0, \qquad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots),$$

essendo s il contorno di Γ.

Nel nostro caso deve aversi

$$\int_0^{2\pi} f\left[\frac{1}{2}\, i(\omega_2 - \omega_1)\cos\sigma + \frac{1}{2}\, i(\omega_1 + \omega_2)\right] e^{(n+1)i\sigma} d\sigma = 0, \qquad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots),$$

cioè, posto

$$\omega^*(\sigma) = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)\cos\sigma + \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2),$$

che per σ variabile da zero a π dà tutti i valori di ω compresi nell'intervallo (ω_1, ω_2), avremo

$$\int_0^{\pi} f[i\omega^*(\sigma)] \cos(n+1)\sigma d\sigma = 0, \qquad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots).$$

E queste sono le condizioni a cui devono soddisfare i valori assegnati $f(i\omega^*)$ della funzione f sul segmento $(i\omega_1, i\omega_2)$ dell'asse immaginario affinchè esista la funzione $f(\alpha + i\omega)$ che risolve il problema proposto.