Bollettino Unione Matematica Italiana

Lorenzo Calabi

Le estensioni centrali di gruppi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.3-4, p. 264–266.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_3-4_264_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Le estensioni centrali di gruppi.

Nota di LORENZO CALABI (a Strasbourg).

Sunto. *Determinazione dell'insieme delle estensioni centrali (topologiche e non) di un gruppo dato* F *per un gruppo dato* B *in termini di gruppi di coomologia. Determinazione di alcuni casi importanti in cui tutte le estensioni topologiche sono fibrate e centrali. Generalizzazione di risultati di* EILENBERG-MACLANE *e di* A. SHAPIRO.

La terminologia e le notazioni sono quelle usate da me in ([1]) e qui applicate anche ad estensioni non topologiche. Le dimostrazioni dettagliate saranno pubblicate più tardi in una esposizione completa della teoria delle estensioni.

I.

DEFINIZIONE. – Un' estensione (topologica o no) $E(B, F)$ del gruppo F per il gruppo B è *centrale* se la restrizione ad F di ogni automorfismo interiore di E è un automorfismo interiore di F.

Se F è abeliano questa definizione coincide evidentemente con quella abituale (vedi p. es. ([2])).

Si sa che ogni estensione può essere data da una coppia (g, χ) ove g è una certa applicazione di $B \times B$ in F (sistema di fattori, cociclo) e χ è un'applicazione di B nel gruppo degli automorfismi di F (vedi p. es., ([1])). Vale il

TEOREMA 1. – *Un'estensione* E(B, F) *è centrale se e solo se essa può essere data da una coppia* (g, χ) *con* $\chi \equiv$ *identità. Inoltre, quando* $\chi \equiv$ *identità,* g *prende i suoi valori nel centro* C *di* F.

La condizione è evidentemente sufficiente; essa è anche neces-

([1]) L. CALABI-C. EHRESMANN, « Comptes Rendus de l'Acad. Sciences », Paris, 228, pag. 1551-53 (1949); L. CALABI, ibidem, 229, pag. 413-15 (1949).

([2]) EILENBERG-MACLANE, *Cohomology theory in abstract groups*, I, « Ann. of Math.», 1947, pag. 57.

saria perchè in un' estensione centrale ogni classe d' equivalenza modulo F contiene almeno un elemento permutabile con ogni elemento di F. Dalla definizione stessa di g risulta allora che essa prende i suoi valori in C.

Prese alcune precauzioni, si possono ora applicare alle estensioni centrali i risultati noti sulle estensioni di un gruppo abeliano: in particolare un risultato di EILENBERG-MACLANE [2] che nel nostro caso diventa:

COROLLARIO. – *L' insieme delle estensioni centrali* E(B, F) *ha una struttura di gruppo abeliano isomorfo al secondo gruppo di coomologia* $\mathrm{H}^2(\mathrm{B}, \mathrm{C})$ *relativo al modo triviale di operare di* B *su* C.

Questo corollario completa, nel caso particolare $\Theta = \mathrm{cost.}$, il teorema 11.1 di [3].

Dire che l' insieme delle estensioni ha una struttura di gruppo è dire che esiste una legge di composizione tra le estensioni: il composto $E_1(B, F) \mathbin{\tilde{\vee}} E_2(B, F)$ è un gruppo quoziente d' un sottogruppo del prodotto $E_1 \times E_2$, descritto in un caso particolare da A. SHAPIRO [4].

Il teorema 1 mostra inoltre che ogni estensione centrale $E(B, F)$ ha anche una struttura di simbolo $E(B \times F / C, C)$ e il corollario ci dice che la corrispondenza tra $E(B, F)$ e il sottogruppo $E'(B, C)$ di $E(B \times F / C, C)$ è biunivoca.

II.

Se B e F sono gruppi *topologici* possiamo parlare del sottogruppo $\mathcal{H}^2(B, C)$ di $H^2(B, C)$, C essendo sempre il centro di F, formato dalle classi di coomologia che contengono almeno un cociclo continuo in un intorno dell' elemento neutro di $B \times B$. Risulta allora da quanto precede e da [1] che l' insieme delle estensioni fibrate centrali $E(B, F)$ è un gruppo isomorfo a $\mathcal{H}^2(B, C)$.

Ciò permette di formulare i due risultati seguenti:

TEOREMA 2. – *Nei tre casi seguenti l' insieme di tutte le estensioni topologiche* E(B, F) *ha una struttura di gruppo isomorfo a* $\mathcal{H}^2(B, \mathrm{C})$:

a) B *gruppo connesso*, F *gruppo di Lie compatto*

b) B *gruppo connesso*, F *gruppo di Lie semisemplice*

c) B *gruppo connesso e localmente semplicemente connesso* [5], F *gruppo discreto.*

(3) EILENBERG MACLANE, *Cohomology theory in abstract groups*, II, « Ann. of Math. », 1947, pag. 336.

(4) A. SHAPIRO, *Group extensions of compact Lie groups*, « Ann. of Math. », 1949, pag. 581 e segg.

(5) Ciò vuol dire che ogni elemento di B ammette un sistema fondamentale di intorni connessi per arco e semplicemente connessi.

Infatti le estensioni topologiche in questi tre casi sono tutte centrali poichè B è connesso e la componente connessa dell'elemento neutro del gruppo degli automorfismi di F è formata solo da automorfismi interiori. Di più le estensioni topologiche sono tutte fibrate come risulta da un teorema di GLEASON [6].

LEMMA. - *Se* B *è connesso, ogni estensione topologica* E(B, F) *localmente isomorfa al gruppo prodotto* $\mathrm{B} \times \mathrm{F}$ *è centrale e fibrata.*

La dimostrazione è banale.

TEOREMA 3. - B *e* F *siano due gruppi topologici, il primo dei quali connesso; sia* $\tilde{\mathrm{B}}$ *un gruppo rivestimento connesso di* B *e sia* π *il sottogruppo discreto di* $\tilde{\mathrm{B}}$ *tale che* $\tilde{\mathrm{B}} / \pi = \mathrm{B}$. *Quando tutte le estensioni topologiche* $\tilde{\mathrm{E}}(\tilde{\mathrm{B}}, \mathrm{F})$ *sono triviali l'insieme delle estensioni topologiche* E(B, F) *ha una struttura di gruppo isomorfo a* $\mathcal{H}^2(\mathrm{B}, \mathrm{C})$.

Notiamo che non è necessario che $\tilde{B}$ sia semplicemente connesso e sia quindi il gruppo rivestimento universale.

La dimostrazione si basa sul fatto che ogni $E(B, F)$ ammette come gruppo rivestimento il gruppo prodotto $\tilde{B} \times F$ ed è quindi localmente isomorfa al gruppo $B \times F$. È d'uopo notare che in molti casi dalle ipotesi del teorema 2 seguono quelle del teorema 3.

A. SHAPIRO [4] ha dimostrato che l'insieme delle estensioni topologiche $E(B, F)$ per B e F compatti, connessi, di LIE, ha una struttura di gruppo, del quale egli ha dato un'interpretazione in termini di omomorfismi.

La nozione di estensione centrale ed il lemma precedente permettono di estendere questo risultato senza modificarne (anzi semplificandone) la dimostrazione; esso si può formulare:

TEOREMA 3'. - *Nelle ipotesi del teorema* 3 *l'insieme delle estensioni topologiche* E(B, F) *ha una struttura di gruppo isomorfo al gruppo quoziente*

$$\mathrm{Hom}(\pi, C) / \mathrm{Hom}(\tilde{B}, C) \,|\, \pi .$$

$\mathrm{Hom}(\pi, C)$ designa il gruppo degli omomorfismi di π in C; $\mathrm{Hom}(\tilde{B}, C) \,|\, \pi$ il sottogruppo di quegli omomorfismi che sono prolungabili a tutto $\tilde{B}$.

[6] Citato da J. SERRE. « Comptes Rendus Acad. Sciences », Paris, 230, pag. 917, 1950.