Bollettino
Unione Matematica Italiana

Carlo Bonferroni

Sulle medie multiple di potenze

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.3-4, p. 267–270.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_3-4_267_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1950.

Sulle medie multiple di potenze.

Nota di CARLO BONFERRONI (a Firenze) (*).

Sunto. - *Definita la media « multipla »* $M_{p,q,\ldots}$ *delle* n *quantità* x_i *come radice d'indice* $p+q+\ldots$ *della disposizione-prodotto media di gradi* $p, q, \ldots$, *si estendono ad essa alcune proprietà della comune media di potenze; si dimostra che ravvicinando due indici* p, q *in modo da lasciare invariata* $p+q$, *la* $M_{p,q\ldots}$ *diminuisce (per* x_i *non costante); e si fa notare che la graduatoria per indici delle medie di egual grado non costituisce sempre graduatoria per grandezza (com'è stato talvolta affermato), perchè occorre tener conto anche della variazione di multiplicità.*

1. La comune « media di potenze » d'ordine o grado p, fra $x_1 \ldots x_n$ (positivi), definita da

$$M_p = \sqrt[p]{\frac{S_p}{n}}, \qquad S_p = x_1{}^p + \ldots + x_n{}^p,$$

può essere generalizzata nella media « doppia » o di molteplicità 2, di gradi parziali p, q e totale $p+q$, definita da

$$M_{p,q} = \sqrt[p+q]{\frac{S_{p,q}}{n(n-1)}}, \qquad S_{p,q} = x_1{}^p x_2{}^q + x_2{}^p x_1{}^q + \ldots;$$

nella « tripla » o di molteplicità 3,

$$M_{p,q,r} = \sqrt[p+q+r]{\frac{S_{p,q,r}}{n(n-1)(n-2)}}, \qquad S_{p,q,r} = x_1{}^p x_2{}^q x_3{}^r + x_2{}^p x_1{}^q x_3{}^r + \ldots$$

e così via, per molteplicità superiori.

2. È noto che M_p è funzione crescente di p. Tale proprietà si può estendere in due modi:

a) $M_{p,p,p,\ldots}$ è funzione crescente di p; *b)* $M_{p,q,r,\ldots}$ è funzione crescente del suo massimo indice. Le dimostrazioni si possono dare derivando rispetto a p e tenendo conto delle proprietà delle funzioni concave.

3. Similmente, si dimostra che, sotto condizioni molto larghe,

*) Comunicazione tenuta al III Congresso dell'U. M. I. (Pisa, settembre 1948).

la $M_{p,q,r,\dots}$ tende a $\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$ quando $p, q, r, \dots$ tendono a zero (proprietà ben nota per M_p).

4. Proprietà notevole è la seguente: Se $p > q$ e $p - h > q$, si ha $(h > 0)$

$$M_{p,q,r,s,\dots} \leq M_{p-h,\, q+h,\, r,\, s,\dots}.$$

L'uguaglianza si ha solo per $x_1 = x_2 = \dots$. Essendo sufficiente dimostrare che la proprietà vale per la $M_{p,q}$ e per due quantità x_1, x_2, si consideri

$$S_{p,q} = x_1^p x_2^q + x_2^p x_1^q.$$

Facendo variare p e q in modo che sia $p + q =$ costante, si ha $dq = -dp$ e

$$dS_{p,q} = x_1^q x_2^q (x_1^{p-q} - x_2^{p-q})(\log x_1 - \log x_2)dp\,;$$

quindi $dS_{p,q}$ ha il segno di dp (se $x_1 \neq x_2$) finchè risulta $p > q$, e l'opposto per $p < q$. Ciò significa che $S_{p,q}$ diminuisce al diminuire di p fino al valore $\frac{1}{2}(p+q)$, per poi risalire al valore primitivo (quando p si scambia con q).

Invece di differenziare, si può osservare che è

$$x_1^p x_2^q + x_2^p x_1^q - (x_1^{p-h} x_2^{q+h} + x_2^{p-h} x_1^{q+h}) =$$
$$= x_1^q x_2^q (x_2^h - x_1^h)(x_2^{p-h-q} - x_1^{p-h-q})$$

e che questa differenza è positiva se $p - h > q$, traendone le stesse conclusioni.

In particolare, poichè

$$M_p = M_{p,0} = M_{p,0,0} \text{ ecc.}$$
$$M_{p,q} = M_{p,q,0} = M_{p,q,0,0} \text{ ecc.}$$

risulterà

$$M_p \geq M_{p-h,h}\,;\; M_{p,q} \geq M_{p-h,q,h}\,;\; \text{ecc.}$$

5. I precedenti teoremi permettono di stabilire (p, q interi) la graduazione delle medie per i primi gradi (a parità delle x_i). Formiamo una tabella, collocando nella stessa verticale le medie di uno stesso grado (totale): per il 3° grado, ad es., esse sono M_3, $M_{2,1}$, $M_{1,1,1}$. Disponiamole in modo che decresca il 1° indice; a parità di questo, che decresca il 2°; ecc. Le medie di grado k sono tante, quante le partizioni di k in k interi (positivi o nulli) non crescenti. Nella stessa orizzontale disponiamo, poi, medie a 1° indice crescente. Limitandoci ai primi 7 gradi, avremo la seguente tabella (schematica) T.

TABELLA T

1	2	3	4	5	6	7
	11	21	31	41	51	61
			22	32	42	52
		111	211	311	411	511
					33	43
				221	321	421
			1111	2111	3111	4111
						331
					222	322
					2211	3211
				11111	21111	31111
						2221
						22111
					111111	211111
						1111111

Le medie della stessa orizzontale formano una successione crescente da sinistra a destra (per la proprietà di n. 2); quelle di una stessa verticale diminuiscono dall'alto in basso per i primi 5 gradi, in quanto una media si trasforma nella successiva ravvicinando due indici (per la proprietà di n. 4). Così

$$M_5 = M_{5,0} > M_{4,1} > M_{3,2} = M_{3,2,0} > M_{3,1,1} > M_{2,2,1} = \\ = M_{2,2,1,0} > M_{2,1,1,1} > M_{1,1,1,1,1} .$$

Nel 6° grado, invece, non si può passare da $M_{4,1,1}$ a $M_{3,3}$ per ravvicinamento di indici, onde non possiamo applicare la proprietà di n. 4. Effettivamente, *non è sempre* $M_{4,1,1} > M_{3,3}$ (per x_i distinte). Basta osservare che, formati questi due indici su tre valori x_1, x_2, x_3, facendo tendere a zero solo x_1 si può rendere $M_{4,1,1} < M_{3,3}$ (in quanto, per $x_1 = 0$, s'annulla solo la prima media); mentre, facendo crescere sufficientemente solo x_1, si può far risultare $M_{4,1,1} > M_{3,3}$ (perchè x_1 interviene al 4° grado in $M_{4,1,1}$ e al 3° in $M_{3,3}$).

Lo stesso avviene di $M_{3,1,1,1}$ e $M_{2,2,2}$ (come si vede formandole su 4 valori); e anche per le medie di 7° grado sottolineate in tabella (nei confronti delle successive); e, in generale, per le medie la cui multiplicità supera quella della media successiva. Dunque: *la disposizione per graduatoria di indici costituisce disposizione per ordine di grandezza solo per i primi 5 gradi* [1].

[1] G. ZAPPA, studiando certe classi di medie (*Osservazioni sopra le medie combinatorie,* Metron, Vol. XIV, n. 1, 15-VI-1940, p. 31), le ha

Dal 6° grado in poi, la differenza fra due medie successive può cambiar di segno. Ciò avviene sicuramente (come s'è visto) quando la multiplicità diminuisce; ma può avvenire anche in altri casi (p. es., si riconosce che può essere $M_{5,2,2} \gtreqless M_{4,4,1}$). Affinchè la differenza non cambi segno, è sufficiente che da una media si passi all'altra per ravvicinamento di indici (n. 4), nel qual caso la multiplicità non diminuisce.