Bollettino
Unione Matematica Italiana

Fernando Giaccardi

Di una formula integrale dei polinomi di Hermite

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.3-4, p. 270–273.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_3-4_270_0>

Di una formula integrale dei polinomi di Hermite.

Nota di FERNANDO GIACCARDI (a Trieste).

Sunto. - *Si stabilisce la seguente formula integrale dei polinomi di* HERMITE:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot H_k(x) f(x) dx = \sqrt{\pi} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \frac{f^{(2s+k)}(0)}{s!\, 2^{2s}}.$$

1. Adottando la seguente definizione dei polinomi di HERMITE

$$H_n(x) = (-1)^n \cdot e^{x^2} \cdot \frac{d^n(e^{-x^2})}{dx^n}. \tag{1}$$

od anche

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{n!}{k!} \frac{(2x)^{n-2k}}{(n-2k)!},$$

E. FELDHEIM [1] ha stabilito la interessante formula d'inversione

$$(2x)^n = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n!}{\nu!} \cdot \frac{H_{n-2\nu}(x)}{(n-2\nu)!} \tag{2}$$

dove $\left[\frac{n}{2}\right]$ denota il massimo intero contenuto in $\frac{n}{2}$.

separate in alcuni tipi, corrispondenti precisamente alle medie multiple qui studiate. Dopo aver verificato che è $S_{3,2} \geq S_{3,1,1}$, ha ritenuto la dimostrazione « di carattere generale, valevole per due qualunque tipi consecutivi e per qualunque ordine » (p. 39). Le considerazioni ora svolte mostrano, invece, che non basta riferirsi alla graduatoria per indici, ma che occorre tener conto, tra l'altro, anche della variazione di multiplicità.

(1) E. FELDHEIM, *Applicazioni dei polinomi di* HERMITE *a qualche problema delle probabilità*, « Giorn. dell'Istituto Italiano degli attuari », Roma, 1937, pag. 306.

Tenuto conto della (2), *se* f(x) *é sviluppabile in serie di potenze,* si potrà scrivere

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \cdot \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot f^{(n)}(0) \cdot \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{H_{n-2\nu}(x)}{\nu!\,(n-2\nu)!}.$$

Sviluppando ora formalmente, senza tenere conto della convergenza, si avrà

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot f^{(n)}(0) \left[\frac{H_n(x)}{0!\,n!} + \frac{H_{n-2}(x)}{1!\,(n-2)!} + \dots + \frac{H_0(0)}{\left[\frac{n}{2}\right]!\,0!}\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot f^{(n)}(0) \cdot \frac{H_n(x)}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot f^{(n)}(0) \cdot \frac{H_{n-2}(x)}{(n-2)!} + \dots$$

ovvero

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k H_k(x) \tag{*}$$

essendo

$$A_k = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{f^{(2s+k)}(0)}{k!\; s!\; 2^{2s+k}}. \tag{3}$$

Risulta peraltro dallo sviluppo secondo CHARLIER della serie tipo H lo sviluppo (*) con

$$A_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2} \cdot H_k(x) f(x)}{2^k \cdot k!\sqrt{\pi}}\, dx \;(^2). \tag{4}$$

Ne segue perciò dal confronto fra (3) e (4)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_k(x) f(x)\, dx = \sqrt{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{f^{(2s+k)}(0)}{s!\; 2^{2s}}. \tag{5}$$

2. La (5) è certo vera quando $f(x)$ sia un polinomio perchè, in tal caso, la serie del secondo membro si riduce ad una somma finita

In generale risulta

$$f(x) = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_p(x) = f_p(x) + R_p(x)$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_k(x) f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_k(x) f_p(x)\, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_k(x) R_p(x)\, dx.$$

(2) G. VITALI e G. SANSONE, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*, p. 2ª, Zanichelli, 1935, pag. 228.

Basterà dimostrare che

$$(6) \qquad \lim_{p \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_k(x) R_p(x) dx = 0$$

perchè, se sussiste la (6) sarà certamente valida la (5)

Ora,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_k(x) f_p(x) dx = \sqrt{\pi} \cdot \sum_{s=0}^{\left[\frac{p-1-k}{2}\right]} \frac{f_p^{(2s+k)}(0)}{s!\, 2^{2s}} = \sqrt{\pi} \sum_{s=0}^{\left[\frac{p-1-k}{2}\right]} \frac{f^{(2s+k)}(0)}{s!\, 2^{2s}}.$$

e perciò

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_k(x) f(x) dx = \sqrt{\pi} \cdot \sum_{s=0}^{\left[\frac{p-1-k}{2}\right]} \frac{f^{(2s+k)}(0)}{s!\, 2^{2s}} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_k(x) R_p(x) dx.$$

Indichi ora $M(r)$ il massimo modulo di $f(x)$ per $|x| \leq r$ con x reale o complesso.

Si ha in tale caso

$$(7) \qquad |f^{(v)}(x)| \leq \frac{v!\, M(r)}{(r - |x|)^v}$$

quindi, se $\alpha > 1$, poniamo $r = \alpha |x|$, perciò la (7) porge

$$|f^{(v)}(x)| \leq \frac{v!\, M(\alpha |x|)}{|x|^v (\alpha - 1)^v},$$

mentre si ha per $R_p(x)$

$$R_p(x) = \frac{x^p}{p!} \cdot f^{(p)}(\theta x) \qquad 0 < \theta < 1$$

e

$$|R_p(x)| \leq \frac{x^p}{p!} \cdot \frac{p!\, M(\alpha |x|)}{|x|^p (\alpha - 1)^p} = \frac{M(\alpha |x|)}{(\alpha - 1)^p}.$$

Si potrà allora scrivere

$$(8) \qquad \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_k(x) R_p(x) dx \right| \leq \frac{1}{(\alpha - 1)^p} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} |H_k(x)|\, M(\alpha |x|) dx$$

e, se $\alpha - 1 > 1$ e cioè $\alpha = 2 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ è certo $\lim\limits_{p \to \infty} (\alpha - 1)^{-p} = 0$

e, nell'ipotesi che valga la seguente limitazione

$$(9) \qquad M(r) \leq e^{\beta r^2 + \gamma r} \cdot N(r)$$

con $N(r)$ polinomio in r, si ha

$$M[(2 + \varepsilon) |x|] \leq e^{\beta (2+\varepsilon)^2 x^2 + \gamma (2+\varepsilon)|x|} \cdot N[(2 + \varepsilon) |x|]$$

ed

$$e^{-x^2} M[(2+\varepsilon)\,|\,x\,|] < e^{-[1-\beta(2+\varepsilon)^2]x^2+\gamma(2+\varepsilon)|x|} \cdot N[(2+\varepsilon)\,|\,x\,|].$$

Basterà prendere β in modo che $1 > \beta(2+\varepsilon)^2$ e allora nella (8) il fattore integrale del secondo membro risulta finito e quindi sarà certo verificata la (6) e perciò varrà lo sviluppo (5) [3].

A titolo di esempio:

a) Posto in (5): $k = 0$ ed $f(x) = x^{2n}$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^{2n} dx = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \sqrt{\pi} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2n-1).$$

b) Posto in (5): $k = 0$ ed $f(x) = e^{2bx}$ si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+2bx} dx = \sqrt{\pi} \cdot e^{b^2}.$$

c) Posto in (5): $k = 0$ ed $f(x) = \cos x$ si trae

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos x dx = \sqrt{\pi} \cdot e^{-\frac{1}{4}}.$$