BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LORENZO CALABI

Su alcuni rapporti tra la teoria delle estensioni ed il gruppo degli automorfismi del gruppo esteso

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.3-4, p. 286–289.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_3-4_286_0>

Su alcuni rapporti tra la teoria delle estensioni ed il gruppo degli automorfismi del gruppo esteso.

Nota di LORENZO CALABI (a Strasbourg).

Sunto. - *Si stabilisce un criterio di esistenza per le estensioni di un gruppo* F, *basandosi su una proprietà del gruppo degli automorfismi di* F. *Una proprietà analoga conduce a definire le estensioni preinessenziali, l'insieme delle quali si dimostra essere un gruppo.*

Per la terminologia e le notazioni si veda [1] *ed i lavori colà citati. Salvo menzione esplicita, i gruppi considerati sono* gruppi discreti.

I.

Un'estensione $E(B, F)$ del gruppo F per il gruppo B (B ed F essendo gruppi topologici qualsivogliano) determina univocamente un sottogruppo X del gruppo $\mathfrak{A}(F)$ degli automorfismi di F, ottenuto fa-

[7] Per un teorema di L. TONELLI, *Sulla rettificazione delle curve*, « Atti Accademia delle Scienze », Torino, Vol. 43 (1908), pag. 783.

[1] L. CALABI, questo fascicolo del « Bollettino », *Le estensioni centrali di gruppi*.

cendo corrispondere all'elemento z di E l'automorfismo $y \to z^{-1}yz$ di F, $y \in F$. In particolare quindi il gruppo $\mathfrak{J}(F)$ degli automorfismi interni di F è contenuto in X, il quale ha così una struttura di estensione $X(B^{\cdot}, \mathfrak{J}(F))$. L'applicazione di E su X è un omomorfismo di E sul gruppo opposto di $\dot{X}$ [2]. Se ne deduce un omomorfismo χ di B sul gruppo opposto di $B^{\cdot}$, che è un *invariante* dell'estensione $E(B, F)$. Se (g, χ) è una coppia corrispondente a $E(B, F)$, la proiezione di χ in $\mathfrak{A}(F)/\mathfrak{J}(F)$ coincide con $\dot{\chi}$.

LEMMA I. – *I gruppi* B *e* F *e l'omomorfismo* χ *di* B *nel gruppo opposto di* $\mathfrak{A}$(F) / $\mathfrak{J}$(F) *essendo dati, affinchè esista un'estensione* E(B, F) *d'invariante* $\dot{\chi}$, *occorre e basta che esista un'estensione* $\overline{\mathrm{X}}$(B$^{\cdot}$, F) *il cui invariante sia la simmetria* [2] *di* B$^{\cdot}$.

$B^{\cdot}$ designa il gruppo opposto di $\dot{\chi}(B)$.

Che ciò non si verifichi sempre ha mostrato R. BAER [3] con un esempio.

Ma se il centro di F si riduce all'elemento neutro, potendosi identificare F a $\mathfrak{J}(F)$, il nostro Lemma, che coincide allora con un risultato di BAER, assicura l'esistenza di un'estensione per ogni $\dot{\chi}$; l'invariante di $X(B^{\cdot}, \mathfrak{J}(F))$ è infatti la simmetria di $B^{\cdot}$.

Si deduce subito il

TEOREMA 1. – *Un gruppo* F *essendo dato, le due proposizioni seguenti sono equivalenti:*

a) *Esiste un'estensione* E($\mathfrak{A}$(F) / $\mathfrak{J}$(F), F) *il cui invariante è la immetria.*

b) *Per ogni gruppo* B *ed ogni invariante* $\dot{\chi}$ *esiste un'estensione* E(B, F) *d'invariante* $\dot{\chi}$.

Da questo risultato segue facilmente un criterio analogo per l'esistenza di estensioni *fibrate* $E(B, F)$, B e F essendo gruppi topologici qualsivogliano.

II.

DEFINIZIONE. – Un'estensione $E(B, F)$ è *preinessenziale* se, C designando il centro di F, l'estensione $E/C(B, F/C)$, che se ne deduce per passaggio al quoziente, è inessenziale.

Ricordiamo che C è sempre un sottogruppo invariante di E.

Poichè ad un'estensione inessenziale e solo ad un'estensione inessenziale può sempre corrispondere una coppia (g, χ) con $g=$cost., si ha il

TEOREMA 2. – *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una estensione* E(B, F) *sia preinessenziale è che ad essa corrisponda una*

[2] La *simmetria* σ d'un gruppo G è l'endomorfismo $x \to x^{-}$ di G su sè stesso; $\sigma(G)$ è il *gruppo opposto* di G.

[3] R. BAER, « Math. Z. », 38, p. 415 (1934).

coppia (g, χ) *tale che* g *prenda i suoi valori in* C; χ *è allora un omomorfismo di* B *nel gruppo opposto di* $\mathfrak{A}$(F).

Se ne deduce l'importante

Corollario I. – *Affinchè un'estensione* E(B, F) *d'invariante* $\dot{\chi}$ *sia preinessenziale occorre e basta che esista un omomorfismo* ξ *di* B *nel gruppo opposto di* $\mathfrak{A}$(F) *la cui proiezione* $\dot{\xi}$ *in* $\mathfrak{A}(F)/\mathfrak{I}(F)$ *coincida con* $\dot{\chi}$.

Dunque, se *un'* estensione $E(B, F)$ d'invariante $\dot{\chi}$ è preinessenziale, lo saranno anche *tutte* le altre d'ugual invariante.

La condizione del Corollario 1 è certamente verificata quando $X(B^{\cdot}, \mathfrak{I}(F))$ è un'estensione inessenziale; dunque:

Corollario 2. – *Un'estensione* E(B, F) *è preinessenziale se il gruppo corrispondente* X *ha una struttura d'estensione inessenziale* X(B$^{\cdot}$, $\mathfrak{I}$(F)).

Lemma 2. – *L'insieme delle estensioni preinessenziali* E(B, F) *d'invariante* $\dot{\chi}$ *è un gruppo isomorfo a* H^2(B, C, χ).

χ è un omomorfismo che si proietta su $\dot{\chi}$ e che indica il modo di operare di B su C, considerato come sottogruppo caratteristico di F. Questo Lemma generalizza il Corollario del Teorema 1 di (1), chè evidentemente le estensioni centrali sono preinessenziali. Come allora, anche qui abbiamo tacitamente identificato tra loro due estensioni $E_1(B, F)$ e $E_2(B, F)$ quando esiste un isomorfismo di E_1 su E_2 la cui restrizione a F e la cui proiezione su B sono le trasformazioni identiche.

Se, per $i = 1, 2$, a $E_i(B, F)$ corrisponde la coppia (g_i, χ), g_i prendendo i suoi valori in C, a l'estensione composto $E_1(B, F) \circ E_2(B, F)$ corrisponde la coppia $(g_1 g_2, \chi)$.

Per applicazione del Corallario 2 del Teorema 2 segue ora dunque il

Teorema 3 – *Il gruppo* F *essendo tale che* $\mathfrak{A}$(F) *è un'estensione inessenziale di* $\mathfrak{I}$(F), *per ogni gruppo* B *e per ogni invariante* $\dot{\chi}$, *l'insieme delle estensioni* E(B, F) *d'invariante* $\dot{\chi}$ *è un gruppo isomorfo a* H^2(B, C, χ).

L'ipotesi essendo verificata se $F = C$ è abeliano, abbiamo qui una generalizzazione del noto risultato concernente le estensioni di un gruppo abeliano.

Le relazioni tra il Teorema 1 e il Teorema 3 sono indicate dal

Lemma 3. – *Un gruppo* F *essendo dato, vi è equivalenza tra le proposizioni seguenti:*

1) $\mathfrak{A}$(F) *è un'estensione inessenziale di* $\mathfrak{I}$(F).

2) *Esiste un'estensione* E($\mathfrak{A}(F)/\mathfrak{I}(F)$, F) *il cui invariante è la simmetria e tutte le estensioni di* F *per* $\mathfrak{A}(F)/\mathfrak{I}(F)$ *sono preinessenziali.*

Per terminare citiamo la seguente applicazione del Teorema 3 a gruppi topologici qualsivogliano:

TEOREMA 4. – B *e* F *essendo gruppi topologici supponiamo* $\mathfrak{A}(F)$ *estensione inessenziale di* $\mathfrak{J}(F)$; *se* χ *è un omomorfismo di* B *nel gruppo opposto di* $\mathfrak{A}(F)$ *tale che l'applicazione* $(x, y) \rightarrow \chi_x(y)$ *per* $x \varepsilon B$, $y \varepsilon F$ *è continua in* $V \times F$, *ove* V *è un intorno dell'elemento neutro di* B, *l'insieme delle estensioni fibrate* E(B, F) *d'invariante* χ *è un gruppo isomorfo a* $\dot{\mathcal{H}}^2(B, C. \chi)$.