Bollettino
Unione Matematica Italiana

Antonio Colucci

Su qualche proprietà dei polinomi di Legendre

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.3-4, p. 289–292.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_3-4_289_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1950.

Su qualche proprietà dei polinomi di Legendre.

Nota di Antonio Colucci (a Napoli).

Sunto. - *Si perfeziona una limitazione di* G. Sansone *e si studia l'espressione* $P_n^2 + \lambda P_{n-1}P_{n+1}$ *per i diversi valori (reali) di* λ.

1. *a*) P. Turàn (¹) pare sia stato il primo ad osservare che la espressione

$$[P_n(x)]^2 - P_{n-1}(x)P_{n+1}(x),$$

costruita con tre polinomi di Legendre successivi, è positiva per i valori di x compresi tra -1 e 1.

Recentemente G. Sansone, in due eleganti note apparse in questo « Bollettino » (²), ha perfezionato tale teorema e ha fatto vedere che l'espressione in parola è definita negativa per $|x| > 1$.

Nel presente breve scritto, giovandoci all'occorrenza delle proprietà ricordate, ci proponiamo di esporre alcune osservazioni, che riteniamo nuove, intorno ai polinomi di Legendre.

b) È noto che se un polinomio $f(x)$ di grado n ha gli zeri reali e semplici, il suo Hessiano

$$H(x) = (n-1)[f'(x)]^2 - f(x)f''(x),$$

il cui grado è generalmente $2n - 4$, li ha tutti immaginari, ragion per cui $H(x)$ riesce definito positivo su tutto l'asse reale (³).

(¹) G. Szegö, *On an inequality of P. Turàn concerning Legendre polinomials*, « Bull. of the Am. Math. Soc. », 54 (1948), pp. 401-405.

(²) G. Sansone, *Su una diseguaglianza di P. Turàn relativa ai polinomi di Legendre* e *Su una diseguaglianza relativa ai polinomi di Legendre*, « Boll. Un. Mat. Ital. », (3), 4 (1949), pp. 221-223 e (4) 4 (1949), 339-341.

(³) F. Gerbaldi, *Un teorema sull'Hessiana di una forma binaria*, « Rend. del Circolo Mat. di Palermo », t. III, (1889), p. 22.

Applicando questo teorema all'ennesimo polinomio di LEGENDRE, $P_n(x)$, e ricordando che

$$(x^2-1)P_n'(x) = nxP_n(x) - nP_{n-1}(x) \tag{1}$$

si trova

$$(n+1)[P_n(x)]^2 - 2nxP_n(x)P_{n-1}(x) + (n-1)[P_{n-1}(x)]^2 \geq 0 \tag{2}$$

l'eguaglianza sussistendo solo per $x = \pm 1$.

Se $x > 1$, insieme con la diseguaglianza precedente, è verificata quella di SANSONE

$$[P_n(x)]^2 - P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) < 0$$

che a cagion della nota formola

$$P_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)}{n+1}$$

diventa

$$(n+1)[P_n(x)]^2 - (2n+1)xP_n(x)P_{n-1}(x) + n[P_{n-1}(x)]^2 < 0. \tag{3}$$

Consideriamo ora le due equazioni di secondo grado

$$(n+1)\rho^2 - 2nx\rho + n - 1 = 0,$$
$$(n+1)\rho^2 - (2n+1)x\rho + n = 0$$

contenenti linearmente il parametro (positivo) n, che immaginiamo variabile con continuità.

Esse, per i dichiarati valori di x e n, non hanno mai radici comuni; e poichè le due coppie di radici si separano per $n = 1$, lo stesso fatto deve verificarsi per gli altri valori di n.

Premesso ciò dalle disuguaglianze (2) e (3) si trae la limitazione

$$\varphi_n(x) < \frac{P_n(x)}{P_{n-1}(x)} < \varphi_{2n+1}(x) \tag{4}$$

dove per brevità si è posto

$$\varphi_n(x) = \frac{nx + \sqrt{n^2(x^2-1)+1}}{n+1}.$$

Dalla (4) si ricava subito la nota relazione

$$\lim_{n \to \infty} \frac{P_n(x)}{P_{n-1}(x)} = x + \sqrt{x^2-1},$$

e data la crescenza di $\varphi_n(x)$ rispetto ad n si trova anche

$$x < \frac{P_n(x)}{P_{n-1}(x)} < x + \sqrt{x^2-1} \qquad (x > 1,\ n = 2, 3, \ldots)$$

che è la limitazione di SANSONE.

c) La parte sinistra della (4) è verificata anche se x è compreso tra $\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}$ e 1; perciò gli zeri di $P_n(x)$ sono, in modulo, minori di $\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}$.

d) Tenendo conto della (1) e del teorema di SANSONE si ha

$$\left(\frac{P_n}{P_{n-1}}\right)' = \frac{P_n(xP_{n-1} - P_{n-2}) - n(P^2_{n-1} - P_{n-2}P_n)}{(x^2-1)P^2_{n-1}} > 0,$$

cioè $\frac{P_n}{P_{n-1}}$ è funzione crescente di x per $x > 1$ [4].

2. Consideriamo ora l'espressione

$$[P_n(x)]^2 + \lambda P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) \tag{5}$$

che generalizza in modo naturale quella studiata da P. TURÀN, G. SZEGÖ e G. SANSONE.

Che cosa si può dire al riguardo?

Evidentemente basta limitarsi alla considerazione dei soli valori positivi di x.

Se $-1 < \lambda < 0$ è ovvio, in base a quanto abbiamo ricordato in principio, che la (5) assume valori positivi per $0 \leq x \leq 1$. Vediamo se si annulla per $x > 1$.

[4] Il teorema di GERBALDI sopra ricordato può essere di qualche utilità anche nello studio di altre successioni di polinomi ortogonali.

Si considerino, ad esempio, i polinomi di HERMITE

$$H_n(x) = e^{x^2}\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} \qquad n = 1\ 2, \dots;\ H_0(x) = 1.$$

(Cfr. G. SANSONE, *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali*, 1ª ed. Bologna 1935, p. 191).

Tenendo presente che gli zeri di $H_n(x)$ sono reali e semplici e che

$$\frac{dH_{n+1}}{dx} = -2(n+1)H_n$$

il teorema dell'Hessiano dà subito

$$(n+1)H_n^2 - H_{n-1}H_{n+1} > 0.$$

Combinando questa con la nota relazione

$$H_{n+1} \pm 2xH_n + 2nH_{n-1} = 0$$

si ricava una diseguaglianza contenente H_n e H_{n-1}.

La funzione

$$g(x) = \frac{[P_n(x)]^2}{P_{n-1}(x)P_{n+1}(x)}$$

porge

$$g(1) = 1, \qquad \lim_{x \to \infty} g(x) = \frac{(2n-1)(n+1)}{n(2n+1)} < 1$$

perciò se k è l'estremo inferiore, certamente positivo, di $g(x)$ nell'intervallo $(\overline{1, +\infty})$ l'espressione (5) si mantiene positiva (anche) per $x = 1$ oppure cambia di segno secondo che λ è maggiore o minore di $-k$.

In modo analogo si esamina il caso $\lambda < -1$: per i valori di $x \geq 1$ la (5) è definita positiva; invece il suo segno è variabile quando x descrive l'intervatto $(\overline{0,1})$

Più interessante è il caso $\lambda > 0$.

Consideriamo le due coppie di polinomi sturmiani P_{n+1}, P_n; P_n, λP_{n-1}: per un noto teorema (5) le due equazioni

$$P_{n+1} + iP_n = 0, \qquad P_n + i\lambda P_{n-1} = 0$$

hanno le radici con parte immaginaria negativa. La stessa proprietà appartiene all'equazione prodotto

$$P_n(P_{n+1} - \lambda P_{n-1}) + i(P_n^2 + \lambda P_{n-1}P_{n+1}) = 0$$

e quindi (sempre per il citato teorema) i due polinomi

$$P_n(P_{n+1} - \lambda P_{n-1}), \qquad P_n^2 + \lambda P_{n-1}P_{n+1}$$

sono sturmiani (6).

Pertanto l'equazione

$$P_n^2 + \lambda P_{n-1}P_{n+1} = 0 \qquad (\lambda > 0)$$

ha le radici tutte reali e semplici (e naturalmente comprese tra -1 e $+1$).

(5) A. Colucci, *Sopra i polinomi definiti e le equazioni algebriche a coefficienti complessi*, « Semin. Mat. Università di Roma », (1939), s. IV, vol. 3, fasc. 3.

(6) Notisi che le radici di P_n separano quelle di $P_{n+1} - \lambda P_{n-1}$; invero i due polinomi non possono avere radici comuni e per $\lambda = 0$ i due gruppi di radici si separano.

Se $\lambda = 1$ le radici del secondo polinomio, ove si prescinda da ± 1, sono quelle di P_n'.