Bollettino Unione Matematica Italiana

Giuseppe Varoli

Calcolo di alcuni determinanti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.3-4, p. 293–297.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_3-4_293_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1950.

Calcolo di alcuni determinanti.

Nota di GIUSEPPE VAROLI (a Bologna).

Sunto. - *Si ottengono sviluppi di determinanti dal confronto di identità ottenute con procedimenti diversi.*

1. Sviluppando le potenze $2k$-esima e $(2k+1)$-esima di $\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$ si ottengono le relazioni

$$\cos^{2k} x = \frac{1}{2^{2k-1}}\left[\binom{2k-1}{k} + \sum_{s=0}^{k-1}\binom{2k}{s}\cos(2k-2s)x\right], \tag{1}$$

$$\cos^{2k+1} x = \frac{1}{2^{2k}}\sum_{s=0}^{k}\binom{2k+1}{s}\cos(2k+1-2s)x. \tag{2}$$

Se poniamo

$$\cos 2hx = \sum_{p=0}^{h}\alpha_{h,p}\cos^{2h-2p} x, \tag{3}$$

$$\cos(2h+1)x = \sum_{p=0}^{h}\beta_{h,p}\cos^{2h+1-2p} x \tag{4}$$

e nei secondi membri di queste relazioni esprimiamo le potenze di $\cos x$ mediante la (1) e la (2) otteniamo

$$\begin{aligned}\cos 2hx = {} & \sum_{p=0}^{h-1}\cos(2h-2p)x\sum_{s=0}^{p}\alpha_{h,s}\frac{1}{2^{2h-1-2s}}\binom{2h-2s}{p-s} + \\ & + \sum_{s=0}^{h-1}\alpha_{h,s}\frac{1}{2^{2h-1-2s}}\binom{2h-1-2s}{h-s} + \alpha_{h,h},\end{aligned} \tag{5}$$

$$\cos(2h+1)x = \sum_{p=0}^{h}\cos(2h+1-2p)x\sum_{s=0}^{p}\beta_{h,s}\frac{1}{2^{2h-2s}}\binom{2h+1-2s}{p-s}. \tag{6}$$

Da queste relazioni, per il principio di identità, si deducono due sistemi non omogenei di $h+1$ equazioni lineari in $h+1$ incognite: dalla (5) si ottiene il sistema nelle incognite $\alpha_{h,s}$

$(s = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ h)$

$$
(7)\quad \begin{cases}
1 = \dfrac{1}{2^{2h-1}}\,\alpha_{h,0} \\[2mm]
0 = \dfrac{1}{2^{2h-1}}\dbinom{2h}{p}\alpha_{h,0} + \dfrac{1}{2^{2h-3}}\dbinom{2h-2}{p-1}\alpha_{h,1} + \ldots + \\[2mm]
\qquad + \dfrac{1}{2^{2h-2p+1}}\dbinom{2h-2p+2}{1}\alpha_{h,p-1} + \dfrac{1}{2^{2h-2p-1}}\dbinom{2h-2p}{0}\alpha_{h,p} \\[2mm]
\qquad\qquad (p = 1,\ 2, \ldots,\ h-1) \\[2mm]
0 = \dfrac{1}{2^{2h-1}}\dbinom{2h-1}{h}\alpha_{h,0} + \dfrac{1}{2^{2h-3}}\dbinom{2h-3}{h-1}\alpha_{h,1} + \ldots + \\[2mm]
\qquad + \dfrac{1}{2^{3}}\dbinom{3}{2}\alpha_{h,h-2} + \dfrac{1}{2}\dbinom{1}{1}\alpha_{h,h-1} + \alpha_{h,h}
\end{cases}
$$

le cui soluzioni, come proveremo, sono

$$
(8)\quad \alpha_{h,0} = 2^{2h-1}\,;\quad \alpha_{h,s} = (-1)^s 2^{2h-1-2s}\,\frac{2h}{s}\binom{2h-1-s}{s-1} \quad (s = 1,\ 2, \ldots,\ h)\,;
$$

dalla (6) si ottiene il sistema nelle incognite $\beta_{h,s}$ $(s = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ h)$

$$
(9)\quad \begin{cases}
1 = \dfrac{1}{2^{2h}}\,\beta_{h,0} \\[2mm]
0 = \dfrac{1}{2^{2h}}\dbinom{2h+1}{p}\beta_{h,0} + \dfrac{1}{2^{2h-2}}\dbinom{2h-1}{p-1}\beta_{h,1} + \ldots + \\[2mm]
\qquad + \dfrac{1}{2^{2h-2p+2}}\dbinom{2h-2p+3}{1}\beta_{h,p-1} + \dfrac{1}{2^{2h-2p}}\dbinom{2h-2p+1}{0}\beta_{h,p} \\[2mm]
\qquad\qquad (p = 1,\ 2, \ldots,\ h)
\end{cases}
$$

le cui soluzioni, come proveremo, sono

$$
(10)\quad \beta_{h,0} = 2^{2h}\,;\quad \beta_{h,s} = (-1)^s 2^{2h-2s}\,\frac{2h+1}{s}\binom{2h-s}{s-1} \quad (s = 1,\ 2, \ldots,\ h).
$$

Sostituendo nelle equazioni dei sistemi (7), (9) rispettivamente le (8), (10) e tenendo conto che, nei casi in cui i coefficienti binomiali hanno significato, sussistono le identità

$$
\frac{m}{s}\binom{m-s-1}{s-1}\binom{m-2s}{p-s} = \frac{m}{p}\binom{p}{s}\binom{m-s-1}{p-1},
$$

$$
\frac{2h}{s}\binom{2h-s-1}{s-1}\binom{2h-s-1}{h-s} = \binom{h}{s}\binom{2h-s-1}{h-1},
$$

si ottengono relazioni del tipo

$$a \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} \binom{q-s}{r-1}, \tag{11}$$

ove a rappresenta un fattore non nullo.

Che la (11) sia nulla si dimostra facilmente calcolando per $x = 1$ le derivate $(r-1)$-esime dei due membri dell'identità

$$x^{q-r}(x-1)^r = \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} x^{q-s}$$

(derivando al primo membro con la regola di LEIBNITZ) e dividendo per $(r-1)!$.

2. Se risolviamo i sistemi (7), (9) applicando la regola di CRAMER e confrontiamo le soluzioni ottenute rispettivamente con le (8), (10), otteniamo lo sviluppo di determinanti del tipo

$$\begin{vmatrix} \binom{m}{1} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \binom{m}{2} & \binom{m-2}{1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \binom{m}{3} & \binom{m-2}{2} & \binom{m-4}{1} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{m}{p-1} & \binom{m-2}{p-2} & \binom{m-4}{p-3} & \dots & \binom{m-2p+4}{1} & 1 \\ \binom{m}{p} & \binom{m-2}{p-1} & \binom{m-4}{p-2} & \dots & \binom{m-2p+4}{2} & \binom{m-2p+2}{1} \end{vmatrix} = \frac{m}{p}\binom{m-p-1}{p-1}$$

$$\left[p = 2, 3, \dots, h;\ h = E\left(\frac{m}{2}\right)\right] \text{(1)}.$$

Se nelle note relazioni, dedotte dalla formula di DE MOIVRE,

$$\cos 2hx = \sum_{p=0}^{h} (-1)^p \binom{2h}{2p} \cos^{2h-2p} x \cdot \operatorname{sen}^{2p} x,$$

$$\cos (2h+1)x = \sum_{p=0}^{h} (-1)^p \binom{2h+1}{2p} \cos^{2h+1-2p} x \cdot \operatorname{sen}^{2p} x$$

(1) Con $E\left(\frac{m}{2}\right)$ indichiamo il massimo intero contenuto in $\frac{m}{2}$.

esprimiamo i secondi membri per le sole potenze di $\cos x$, si ottiene

$$\cos 2hx = \sum_{p=0}^{h} (-1)^p \sum_{s=p}^{h} \binom{2h}{2s}\binom{s}{p} \cos^{2h-2p} x,$$

$$\cos (2h+1)x = \sum_{p=0}^{h} (-1)^p \sum_{s=p}^{h} \binom{2h+1}{2s}\binom{s}{p} \cos^{2h+1-2p} x.$$

Confrontando queste relazioni con le (3), (4) e tenendo conto dei valori forniti dalle (8) (10), si ottengono identità che possono compendiarsi in

$$\sum_{s=p}^{h} \binom{m}{2s}\binom{s}{p} = 2^{m-2p-1} \frac{m}{p} \binom{m-p-1}{p-1} \qquad \left[p=1,\ 2, \ldots,\ h;\ h = E\left(\frac{m}{2}\right)\right].$$

3. Scrivendo la (3) per $h = 1, 2, \ldots, k$ ne risultano k equazioni, che possono considerarsi un sistema non omogeneo nelle k incognite $\cos^2 x$, $\cos^4 x, \ldots, \cos^{2k} x$.

Il determinante dei coefficienti, tenuto conto che $\alpha_{h,0} = 2^{2h-1}$ $(h = 1, 2, \ldots, k)$, risulta

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{1,0} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,0} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \alpha_{3,2} & \alpha_{3,1} & \alpha_{3,0} & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{k-1,k-2} & \alpha_{k-1,k-3} & \alpha_{k-1,k-4} & \ldots & \alpha_{k-1,0} & 0 \\ \alpha_{k,k-1} & \alpha_{k,k-2} & \alpha_{k,k-3} & \ldots & \alpha_{k,1} & \alpha_{k,0} \end{vmatrix} = 2^{k^2},$$

allora il valore di $\cos^{2k} x$ è dato da

$$(13) \qquad \cos^{2k} x = \frac{1}{2^{k^2}} \sum_{s=1}^{k} A_{s,k} [(-1)^{s+1} + \cos 2sx],$$

avendo indicato con $A_{s,k}$ il complemento algebrico dell'elemento della riga s-esima ed ultima colonna nel determinante (12).

Confrontando le (1) (13) si ottengono gli sviluppi dei k determinanti di ordine $(k-1)$-esimo

$$A_{s,k} = 2^{(k-1)^2} \binom{2k}{k-s} \qquad (s = 1, 2, \ldots, k).$$

4. Scrivendo la (4) per $h = 0, 1, 2, \ldots, k$ ne risultano $k+1$ equazioni, che possono considerarsi un sistema non omogeneo nelle $k+1$ incognite $\cos x$, $\cos^3 x, \ldots, \cos^{2k+1} x$.

Il determinante dei coefficienti, tenuto conto che $\beta_{h,0} = 2^{2h}$ $(h = 0, 1, \ldots, k)$, risulta

$$
(14) \qquad \begin{vmatrix}
\beta_{0,0} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\beta_{1,1} & \beta_{1,0} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\beta_{2,2} & \beta_{2,1} & \beta_{2,0} & \ldots & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\beta_{k-1,k-1} & \beta_{k-1,k-2} & \beta_{k-1,k-3} & \ldots & \beta_{k-1,0} & 0 \\
\beta_{k,k} & \beta_{k,k-1} & \beta_{k,k-2} & \ldots & \beta_{k,1} & \beta_{k,0}
\end{vmatrix} = 2^{k(k+1)},
$$

allora il valore di $\cos^{2k+1} x$ è dato da

$$
(15) \qquad \cos^{2k+1} x = \frac{1}{2^{k(k+1)}} \sum_{s=0}^{k} B_{s+1,\,k+1} \cos(2s+1)x,
$$

avendo indicato con $B_{s+1,\,k+1}$ il complemento algebrico dell'elemento della riga $(s+1)$-esima ed ultima colonna nel determinante (14).

Confrontando le (2) (15) si ottengono gli sviluppi dei $k+1$ determinanti di ordine k

$$
B_{s+1,\,k+1} = 2^{k(k-1)} \binom{2k+1}{k-s} \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots, k).
$$