Bollettino Unione Matematica Italiana

Antonio Nadile

Sull'esistenza per i sistemi anolonomi soggetti a vincoli reonomi di un integrale analogo a quello dell'energia

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.3-4, p. 297–301.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_3-4_297_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1950.

Sull'esistenza per i sistemi anolonomi soggetti a vincoli reonomi di un integrale analogo a quello dell'energia.

Nota di ANTONIO NADILE (a Messina).

Sunto. - *Si dà forma conveniente alle equazioni dinamiche dei sistemi anolonomi a vincoli dipendenti dal tempo, riferiti ad* n *coordinate lagrangiane, mercè la introduzione di una* n+1*-esima coordinata lagrangiana, e si dimostra, analogamente a quanto ha fatto il* PAINLEVÈ *per i sistemi olonomi, la esistenza, in alcuni casi, di un integrale analogo a quello dell'energia.*

1. Consideriamo un sistema olonomo riferito ad una n-pla di coordinate lagrangiane $q_1, q_2, \ldots, q_n$, e sia

(1) $$T = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_{ij} M_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{1}^{n}{}_{i} \beta_i \dot{q}_i + \gamma = T_2 + T_1 + T_0$$

la forza viva del sistema, supposto a vincoli dipendenti dal tempo (reonomi).

Mediante la introduzione di una $n+1$–esima coordinata q_0 $(\dot{q}_0 = 1)$ la T può assumere la seguente forma:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{ij}\, M_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{1}^{n}{}_i\, \beta_i\dot{q}_i\dot{q}_0 + \gamma\dot{q}_0^2 = \frac{1}{2}\sum_{0}^{n}{}_{ij}\, a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j,$$

dove nei coefficienti in luogo di t si è posto q_0, ed inoltre

$$a_{ij} = M_{ij} = M_{ji}, \quad \text{per} \quad i,\ j \neq 0;\ a_{0j} = a_{j0} = \beta_j, \quad \text{per} \quad j \neq 0;\ \frac{1}{2}a_{00} = \gamma.$$

Le equazioni di Lagrange relative alla forma quadratica T e con riferimento alle $n+1$ coordinate $q_0, q_1, \ldots, q_n$ assumono l'aspetto

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \qquad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n) \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_0} - \frac{\partial T}{\partial q_0} = Q_0, \tag{2'}$$

dove anche nelle Q_i va intesa la sostituzione di q_0 a t.

L'equazione (2′), relativa all'indice zero, serve a dare significato alla $n+1$–esima componente lagrangiana della forza, la quale, in tal senso, è una quantità la cui determinazione coincide col primo membro della detta equazione (2′) [1].

Supponiamo, ora, che il sistema olonomo considerato sia soggetto ulteriormente ad $m < n$ *vincoli di mobilità anolonomi reonomi* espressi dalle equazioni pfaffiane

$$\sum_{0}^{n}{}_r\, b_{hr}\dot{q}_r = 0. \qquad (h = 1,\ 2, \ldots,\ m;\ \dot{q}_0 = 1)$$

La introduzione di $n - m$ caratteristiche cinetiche $\omega_1\ \omega_2, \ldots, \omega_{n-m}$ ci consentirà di esprimere le componenti lagrangiane della velocità mediante le relazioni

$$\dot{q}_r = \sum_h \beta_{rh}\omega_h, \qquad (r = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n) \tag{3}$$
$$[\omega_0 = 1,\ \beta_{00} = 1,\ \beta_{0h} = 0,\ (h = 1, 2, \ldots,\ n-m)]$$

mentre la forza viva assumerà la forma quadratica

$$T^* = \frac{1}{2}\sum_{0}^{n-m}{}_{hk}\, \alpha_{hk}\omega_h\omega_k, \qquad [\alpha_{hk} = \alpha_{kh} = \sum_{0}^{n}{}_{ij}\, a_{ij}\beta_{ih}\beta_{jk}], \tag{1'}$$

nelle $n - m + 1$ quantità $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-m}$.

[1] Cfr. G. D. Mattioli, *Su una forma delle equazioni di Lagrange nelle quali il tempo è introdotto come* n + 1-*esima coordinata*, (« Atti R. Istituto Veneto », T. XCI, 1931-32).

Introducendo inoltre le *quasi coordinate*, definite dalle relazioni $d\xi_h = \omega_h dt$, $(h = 0, 1, \dots, n-m;\ d\xi_0 = \omega_0 dt = dt)$, le (3) si possono scrivere

$$(3') \qquad dq_r = \sum_{0}^{n-m}{}_h \beta_{rh} d\xi_h, \qquad (r = 0, 1, 2, \dots, n)$$

e le equazioni dinamiche del sistema assumono, com'è noto [2], l'aspetto

$$(\mathrm{II}) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_h} - \frac{\delta T^*}{\delta \xi_h} + \sum_{0}^{n-m}{}_{jk} \gamma_{j,hk}\omega_j\omega_k = Q_h^*, \qquad (h = 1, 2, \dots, n-m)$$

ove

$$\frac{\delta}{\partial \xi_h} = \sum_{0}^{n}{}_r \beta_{rh}\frac{\partial}{\partial q_r}, \quad Q_h^* = \sum_{1}^{n}{}_r Q_r \beta_{rh} \qquad (h = 1, 2, \dots, n-m)$$

$$\gamma_{j,hk} = -\gamma_{j,kh} = \sum_{0}^{n}{}_{rs} a_{rs}\beta_{rj}\left(\frac{\delta\beta_{sk}}{\delta\xi_h} - \frac{\delta\beta_{sh}}{\delta\xi_k}\right).$$

Nello stesso modo con cui si introduce la $n+1$-esima equazione di LAGRANGE nel caso olonomo, così, anche in questo caso, appare assai naturale associare alle $n-m$ equazioni (II) l'equazione

$$(\mathrm{II}') \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_0} - \frac{\delta T^*}{\delta \xi_0} + \sum_{0}^{n-m}{}_{jk} \gamma_{j,0k}\omega_j\omega_k = Q_0^*,$$

la quale non ha altro ufficio, per il momento, che quello di definire la Q_0^*.

È beninteso che nella forza viva T^* e nelle componenti Q_i^* si è operata la sostituzione di t con q_0.

2. Dalle equazioni (II) (II') ci proponiamo anzitutto di dedurre una relazione analoga a quella delle forze vive.

Per questo osserviamo intanto che

$$\sum_{0}^{n-m}{}_h \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_h} - \frac{\delta T^*}{\delta \xi_h}\right] d\xi_h = \sum_{0}^{n-m}{}_h \omega_h dt \frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_h} - \sum_{0}^{n-m}{}_h \sum_{0}^{n}{}_r \beta_{rh}\frac{\partial T^*}{\partial q_r} d\xi_h$$
$$= \sum_{0}^{n-m}{}_h \omega_h dt \frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_h} - \sum^{n}{}_r \frac{\partial T^*}{\partial q_r} dq_r,$$

e che, per la emisimmetria delle γ, si ha

$$\sum_{0}^{n-m}{}_h \sum_{0}^{n-m}{}_{jk} \gamma_{j,hk}\omega_j\omega_k d\xi_h = \sum_{0}^{n-m}{}_h \sum_{0}^{n-m}{}_{jk} \gamma_{j,hk}\omega_h\omega_k\omega_j dt = 0.$$

[2] Cfr. C. AGOSTINELLI, *Sull'applicabilità del metodo di Jacobi della Meccanica Analitica ai sistemi anolonomi*, « Rendiconti Accademia Nazionale Lincei », vol. VII, 1949, pag. 993).

D' altra parte, essendo T^* forma quadratica omogenea nelle $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-m}$, risulta

$$2T^* = \sum_0^{n-m}{}_\iota \frac{\partial T^*}{\partial \omega_\iota} \omega_\iota ,$$

da cui, derivando rapporto a t, si ha

$$2\frac{dT^*}{dt} = \sum_0^{n-m}{}_\iota \omega_\iota \frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_\iota} + \sum_0^{n-m}{}_\iota \frac{\partial T^*}{\partial \omega_\iota} \dot{\omega}_\iota ,$$

mentre per derivazione diretta dalla T^* discende

$$\frac{dT^*}{dt} = \sum_0^{m}{}_r \frac{\partial T^*}{\partial q_r} \dot{q}_r + \sum_0^{n-m}{}_l \frac{\partial T^*}{\partial \omega_l} \dot{\omega}_l .$$

Se allora dalla precedente si sottrae quest' ultima si ottiene

$$\frac{dT^*}{dt} = \sum_0^{n-m}{}_\iota \omega_\iota \frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_\iota} - \sum_0^{n}{}_r \frac{\partial T^*}{\partial q_r} \dot{q}_r .$$

Moltiplicando le equazioni (II) e (II') per $d\xi_h$ e $d\xi_0$ rispettivamente, e facendo la somma rispetto all' indice h da 1 a $n-m$, quando si tenga conto di tutte le precedenti, si perviene alla relazione

$$\text{(I)} \qquad \frac{dT^*}{dt} = Q_0^*\omega_0 + \sum_1^{n-m}{}_h Q_h^*\omega_h$$

che ci eravamo proposti di stabilire.

3. Dalla relazione testè trovata discendono varie conseguenze importanti.

Primieramente è da rilevare che dalla (I) si ottiene immediatamente il teorema delle forze vive quando i vincoli tutti, olonomi ed anolonomi, risultano indipendenti dal tempo (vincoli scleronomi).

In secondo luogo si osserva che, se i vincoli anolonomi, pur non essendo scleronomi, sono tali che

$$\beta_{\rho 0} = 0, \qquad (\rho = 0, 1, \dots, n)$$

risulta

$$\alpha_{0k} = \sum_0^{n}{}_{ij} a_{ij}\beta_{i0}\beta_{jk} = 0, \qquad \gamma_{j,0k} = 0, \qquad \frac{\delta T^*}{\delta \xi_0} = \sum_0^{n}{}_r \beta_{r0} \frac{\partial T^*}{\partial q_r} =$$

Allora dalla (II') si deduce $Q_0^* = 0$ e la (I) si riduce alla nota relazione delle forze vive.

Perciò nel caso che esista il potenziale U delle forze, e sia indipendente dal tempo, si presenta l' integrale:

$$T^* - U = \text{cost.}$$

Infine, ponendosi nel caso più generale, cioè supponendo le $\beta_{\rho 0}$ non tutte nulle, essendo reonomi i vincoli olonomi, si ha

$$\frac{\partial T^*}{\partial \omega_0} = T_1^* + 2T_0^*,$$

$$\frac{\delta T^*}{\delta \xi_0} = \frac{1}{2} \sum_{0}^{n-m}{}_{hk} \frac{\delta \alpha_{hk}}{\delta \xi_0} \omega_h \omega_k = \frac{1}{2} \sum_{0}^{n-m}{}_{hk} \sum_{0}^{n}{}_r \beta_{r0} \frac{\partial \alpha_{hk}}{\partial q_r} \omega_h \omega_k,$$

ove

$$T_1^* = \sum_{1}^{n-m}{}_k \alpha_{0k} \omega_k, \qquad T_0^* = \frac{1}{2} \alpha_{00} \omega_0 = \frac{1}{2} \alpha_{00}.$$

Ponendo inoltre

$$T_2^* = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n-m}{}_{hk} \alpha_{hk} \omega_h \omega_k, \qquad (T^* = T_2^* + T_1^* + T_0^*),$$

dalla (II') si deduce

$$Q_0^* = \frac{d}{dt}(T_1^* + 2T_0^*) - \frac{\delta T^*}{\delta \xi_0} + \sum^{n-m}{}_{jk} \gamma_{j,0k} \omega_j \omega_k,$$

con che la (I) fornisce la relazione

$$\text{(I')} \qquad \frac{d}{dt}(T_2^* - T_0^*) = \sum_{0}^{n-m}{}_{jk} \gamma_{j,0k} \omega_j \omega_k - \frac{\delta T^*}{\delta \xi_0} + \sum_{1}^{n-m}{}_h Q_h^* \omega_h$$

da cui dedurremo fra poco, per il nostro sistema anolonomo a vincoli reonomi, un integrale analogo a quello trovato da PAINLEVE per i sistemi olonomi.

Per conseguire lo scopo che abbiamo in vista occorre anzitutto che la forma quadratica

$$\sum^{n-m}{}_{jk} \left[\gamma_{j,0k} - \frac{1}{2} \frac{\delta \alpha_{jk}}{\delta \xi_0}\right] \omega_j \omega_k$$

si riduca ad una forma lineare nelle $\dot{q}$, per il che è necessario che siano soddisfatte le condizioni

$$\gamma_{j,0k} - \frac{1}{2} \frac{\delta \alpha_{jk}}{\delta \xi_0} = 0, \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, n-m).$$

Soddisfatte queste condizioni, e tenendo conto che $\gamma_{j,00} = 0$, la (I') diventa

$$\frac{d}{dt}(T_2^* - T_0^*) = \sum_{1}^{n-m}{}_k \left(\gamma_{0,0k} - \frac{\delta \alpha_{0k}}{\delta \xi_0} + Q_k^*\right) \omega_k - \frac{1}{2} \frac{\delta \alpha_{00}}{\delta \xi_0}.$$

Allora, se il secondo membro di quest' ultima relazione risulta uguale alla derivata totale rispetto al tempo di una funzione $V(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$, discende immediatamente l' integrale

$$T_2^* - T_0^* = V + h \qquad (h = \text{cost})$$

analógo a quello di PAINLEVE.