Bollettino Unione Matematica Italiana

Francesco Gherardelli

Sulla curva dei contatti di ordine massimo fra le curve di un fascio e quelle di un sistema lineare sopra una superficie algebrica

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.3-4, p. 302–305.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_3-4_302_0>

Sulla curva dei contatti di ordine massimo fra le curve di un fascio e quelle di un sistema lineare sopra una superficie algebrica.

Nota di FRANCESCO GHERARDELLI (a Firenze)

Sunto. - *Come le prime righe della Nota.*

1. In questa nota, generalizzando il procedimento con cui SEVERI ottiene l'equivalenza funzionale del gruppo dei punti $(r+1)$ - pli di una g_n^r (1), si determina l'equivalenza a cui soddisfa la curva dei contatti di ordine massimo fra le curve di un fascio e quelle di un sistema lineare, sopra una superficie algebrica.

2. Consideriamo, sopra una superficie algebrica F, un fascio generale $|C|$, dotato di soli punti base semplici ordinari (cioè non a tangente fissa) e privo di curve spezzate, ed un sistema lineare $| \infty^r$, generico su F, tale cioè che nessuna D contenga come parte una C e tale inoltre che la g_n^r, segata da $|D|$ su una C, abbia l'ordine maggiore della dimensione.

In queste ipotesi esiste la curva T_{r+1} luogo dei contatti r - pli fra le C e le D di $|C|$ e $|D|$ rispettivamente. Dimostreremo per la T_{r+1} l'equivalenza:

$$T_{r+1} \equiv (r+1)D + \binom{r+1}{2} C' + \binom{r+1}{2} C \tag{I}$$

dove C' è una curva (effettiva o virtuale) del sistema aggiunto a $|C|$.

La curva T_{r+1} sega una C, fuori dei punti base di $|C|$, nel gruppo $M_{n,r}$ dei punti $(r+1)$ - pli della g_n^r segata su C da $|D|$; gruppo la cui equivalenza funzionale su C è data da (2):

$$M_{n,r} \equiv (r+1)(D,\ C) + \binom{r+1}{2}(C',\ C).$$

Per dimostrare la (I) resta quindi da determinare il comportamento della T_{r+1} nei punti base del fascio $|C|$. Infatti, se la T_{r+1}

(1) Vedi F. SEVERI, *Trattato di Geom. Algebrica,* Bologna, Zanichelli, vol. I°, parte Iª, (1926) pagg. 131-135.

(2) Cfr. nota precedente.

sega complessivamente, su una C, il gruppo:

$$(r+1)(D,\ C)+\binom{r+1}{2}(C',\ C)+\lambda(C,\ C),$$

è, per uno dei criteri di equivalenza di SEVERI,

$$T_{r+1}\equiv(r+1)D+\binom{r+1}{2}C'+\lambda C.$$

Dimostreremo la (I) per induzione da r ad $r+1$, posto che per $r=1$ essa coincide con una ben nota relazione [3].

3. Rappresentiamo projettivamente il sistema $|D|$ con gli iperpiani di S_r. Ad ogni punto di S_r, come centro di una stella di iperpiani, corrisponde un sistema $|D_1|\ \infty^{r-1}$ contenuto in $|D|$. Diciamo Σ_d il sistema ∞^1 di $|D_1|$ che corrisponde ai punti di una retta d generica di S_r. Il sistema Σ_d gode della proprietà che, fissata una curva D di $|D|$ o essa appartiene a tutti i $|D_1|$ di Σ_d o appartiene ad uno solo di essi. Consideriamo la curva T_r dei contatti $(r-1)$-pli di un $|D_1|$, variabile in Σ_d, con $|C|$. Al variare di $|D_1|$ in Σ_d, T_r varia descrivendo un fascio; infatti, sia P un punto generico della superficie F, esso non può essere di contatto $(r-1)$-plo per ∞^1 (almeno) D con la C passante per esso, perchè ad ogni $|D_1|$ apparterrebbe una (almeno) di quelle curve e quindi ogni $|D_1|$ avrebbe infiniti punti di contatto $(r-1)$-plo con una C. Sia D_0 la curva di $|D|$ che ha in P, con la C per P, contatto $(r-1)$-plo. Non può darsi che D_0 appartenga a tutti i $|D_1|$ di Σ_d perchè se no ogni $|D_1|$ di Σ_d possiederebbe infiniti contatti $(r-1)$-pli con le C. Dunque esiste uno ed un solo $|D_1|$ di Σ_d contenente D_0. Ma allora per P passa una ed una sola T_r della ∞^1 considerata. Pertanto il sistema $|T_r|$ è un fascio (lineare, perchè razionale).

4. Ciò posto, si consideri la curva $\overline{T}_2$ dei contatti semplici fra $|T_r|$ e $|C|$; la (I) (nota per $r=1$ [4]) ci dà:

(II) $$\overline{T}_2\equiv T_r+C+C'.$$

[3] Cfr. C. SEGRE, « Atti Acc. delle Scienze di Torino », (1895) vol. 31, pag. 485 ed anche PANNELLI, « Atti Acc. Lincei », (2) 21_1 (1912), pag. 246 e SEVERI, *Serie sist. di equivalenza...*, pag. 198.

[4] In verità la I) si trova dimostrata, per $t=1$, nell'ipotesi che i due fasci non abbiano punti base comuni, ma nel nostro caso, in cui i punti base di $|C|$ sono semplici ordinari, vale ancora per es. la dimostrazione del PANNELLI (loc. cit. in [3]).

Vedremo ora che la nostra ricerca si riduce allo studio della curva $\overline{T}_2$ e più precisamente all'esame delle sue singolarità nei punti base del fascio $|C|$. Dalla (II), osservando che un punto P di $|C|$ è semplice per C, $\binom{r}{2}$-plo per T_r (per la formula ammessa) e non appartiene a C', segue che $\overline{T}_2$ ha in P un punto di molteplicità $r(r-1)+1$ [5].

Per avere un ramo di $\overline{T}_2$ per P è necessario e sufficiente che un punto (almeno, ma in generale uno solo) del gruppo jacobiano della serie segata da $|T_r|$ su una C_0 di $|C|$ cada in P, cioè che due intersezione di una T_r con C_0 cadano in P: due oltre le $\binom{r}{2}$ che vi ha con una C generica. Ora se una C_0 ed una D_0 hanno in P incontro $(r+1)$-punto, il punto P conta due volte [6] nel gruppo dei punti r-pli della g_n^{r-1} segata su C_0 dal $|D_1|$ [7] cui appartiene D_0 e quindi una volta nel gruppo jacobiano della g^1 segata da $|T_r|$ su C_0.

Consideriamo ora un ramo di $\overline{T}_2$ per P che non nasca nel modo ora detto. Esso proverrà da una D_0 di $|D|$ avente con una C_0 molteplicità di intersezione iu P uguale ad r e non maggiore, chè altrimenti si ricadrebbe nel caso precedente. La curva D_0 appartiene ad un solo $|D_1|$ di Σ_d [8]. Se esso non contiene le ∞^1 D di $|D|$ aventi con C_0 in P molteplicità di intersezione $r-1$ un solo punto della g^1 segata da $|T_r|$ su C_0 cade in P e P non conta nel suo gruppo jacobiano. Se invece $|D_1|$ contiene tutte le ∞^1 curve D aventi con C_0 in P molteplicità di intersezione $r-1$, P è punto doppio di quella g^1 e quindi conta una volta nel suo gruppo jacobiano [9]. Se ne deduce che nel sistema $|D_2|$, comune a tutti i

[5] Le molteplicità di $\overline{T}_2$ in P si può anche determinare considerando la jacobiana $(C+T_r)_J$ di una rete estratta da $|C+T_r|$: essa ha in P molteplicità $3\binom{r}{2}+2$ ed è $(C+T_r)_J \equiv \overline{T}_2+T_r+C$ e si ritrova il risultato di sopra.

[6] F. SEVERI, loc. cit. in [1].

[7] Per la genericità di d, D_0 appartiene ad un solo $|D_1|$ di Σ_d.

[8] Cfr. nota precededente.

[9] Può darsi più in generale che $|D_1|$ contenga tutte lo $\infty^k D$ di $|D|$ aventi con C_0 molteplicità di intersezione in P $r-k$ e non tutte quelle aventi molteplicità di intersezione $r-k-1$ [$1 \leq k < r-2$, perchè se $k=r-2$ $|D_1|$ coinciderebbe col sistema delle D per P il che contraddice alla genericità della retta d]; in tal caso il punto P conta $k+1$ volte come punto r-plo della g_n^{r-1} segata da $|D_1|$ su C_0 e quindi k volte nel gruppo jacobiano della g^1 segata da $|T_r|$ su C_0. Sebbene evidentemente sia in generale $k=1$, il ragionamento di sopra si rende subito valido anche in questo caso.

sistemi $|D_1|$ di Σ_d, in quanto contenuto nel suddetto $|D_1|$, esiste una curva D avente con C_0 in P molteplicicità di intersezione $r-1$. Cioè per P passa anche un ramo della curva T_{r-1} luogo dei contatti $(r-2)$-pli fra $|C|$ e $|D_2|$. Si ottengono così tanti rami di $\overline{T}_2$ per P quanti sono quelli della T_{r-1} per P.

Concludendo, la molteplicità di $\overline{T}_2$ in P è data dalla somma delle molteplicità in P della T_{r+1} e della T_{r-1} ora considerata.

In simboli, traducendo numerativamente la formula ammessa:

$$r(r-1)+1=\lambda+\binom{r-1}{2}$$

da cui

$$\lambda=\binom{r+1}{2}$$

e la (I) resta così dimostrata.

5. Il ragionamento svolto in 4) si può ripetere, con ovvi cambiamenti, per un punto generico di $\overline{T}_2$ ottenendosi che esso appartiene o alla T_{r+1} o alla T_{r-1}; la $\overline{T}_2$ è cioè spezzata nella T_{r+1} e nella T_{r-1} e quindi, in accordo con la (I) e la (II):

$$T_{r+1}=\overline{T}_2-T_{r-1}.$$