Bollettino
Unione Matematica Italiana

Giuseppe Varoli

Di un teorema sul triangolo

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.3-4, p. 360–363.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_3-4_360_0>

Di un teorema sul triangolo.

Nota di GIUSEPPE VAROLI (a Bologna).

Sunto. - *Si dà una nuova dimostrazione di un teorema sul triangolo stabilito dal prof.* C. E. BONFERRONI, *teorema che comprende in particolare quello detto « di Napoleone ».*

1. Il prof. C. E. BONFERRONI, in una Nota pubblicata su questo « Bollettino » [1], ha enunciato e dimostrato la seguente proposizione, che comprende come caso particolare il così detto « Teorema

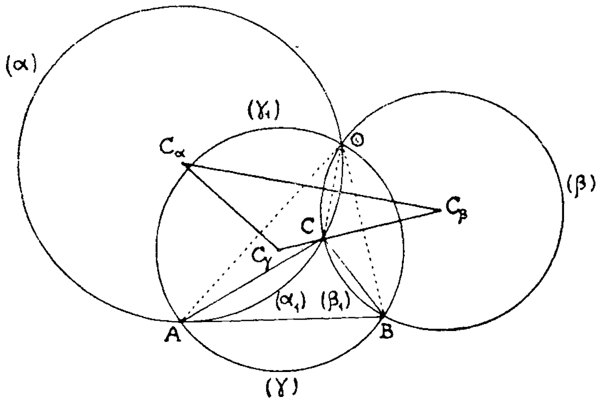

Fig. 1.

di Napoleone »: *Costruiti sui lati di un triangolo gli archi capaci degli angoli* α, β, γ *(tutti dalla parte esterna, o tutti dalla parte del*

[1] *Un teorema sul triangolo e il teorema di Napoleone* (Bollettino dell'U. M. I., serie III, anno V. n. 1, marzo 1950, pagg. 85-89).

triangolo) e supposto $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, *i centri dei tre archi formano un triangolo di angoli* α, β, γ.

Leggendo la Nota abbiamo rilevato come il teorema possa dimostrarsi anche per altra via, tenendo conto che: *I cerchi contenenti gli archi* (α), (β), (γ) (²) *si incontrano in un punto, quando sia* $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

2. Dato il triangolo ABC, costruiamo sui lati AC, CB e dalla parte esterna al triangolo gli archi (α), (β).

Relativamente ai cerchi $(\alpha\alpha_1)$, $(\beta\beta_1)$ possono presentarsi due casi: o i due cerchi sono secanti in C ed in un altro punto O (il quale può essere esterno od interno al triangolo), o sono tangenti in C (caso particolare in cui O coincide con C).

Consideriamo il primo caso: se O è esterno al triangolo ABC,

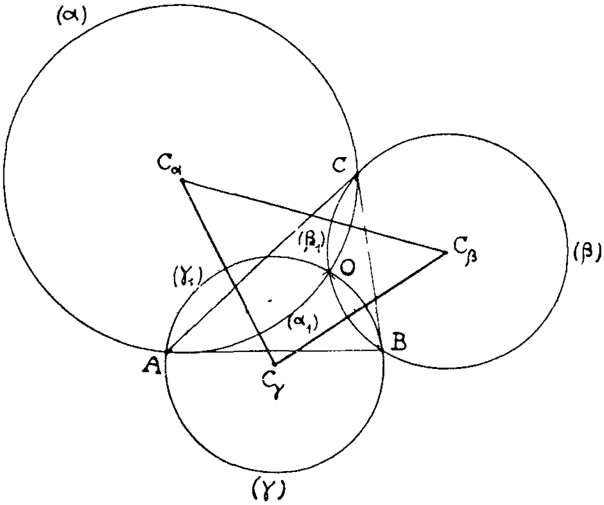

Fig. 2.

in O si intersecano gli archi (α), (β) (fig. 1), se O è interno, in O si intersecano gli archi (α_1), (β_1) (fig. 2).

Congiunto O con i vertici A, B, C, risulta $\widehat{AOC} = \alpha$, $\widehat{COB} = \beta$ nella prima ipotesi, $\widehat{AOC} = 180° - \alpha$, $\widehat{COB} = 180° - \beta$ nella seconda ipotesi.

Se ora costruiamo su AB e dalla parte esterna al triangolo ABC

(²) Manteniamo le opportune notazioni usate dal prof BONFERRONI nella sua Nota, indicando con α, β, γ, gli angoli dati, con α_1, β_1, γ_1 gli angoli ad essi supplementari, con (α), (β), (γ) e (α_1), (β_1), (γ_1) gli archi capaci dei corrispondenti angoli e con C_α, C_β, C_γ i centri dei cerchi $(\alpha\alpha_1)$, $(\beta\beta_1)$, $(\gamma\gamma_1)$.

l'arco (γ), il cerchio $(\gamma\gamma_1)$, essendo eguale a $(\gamma)+(\gamma_1)$, passa necessariamente per O; infatti risulta $\widehat{AOB}=\alpha+\beta=\gamma_1$ nella prima ipotesi e pure $\widehat{AOB}=360^\circ-[(180^\circ-\alpha)+(180^\circ-\beta)]=\alpha+\beta=\gamma_1$ nella seconda ipotesi.

Se i due cerchi $(\alpha\alpha_1)$, $(\beta\beta_1)$ sono tangenti in C la dimostrazione non muta, basta infatti considerare in luogo della congiungente OC (che si riduce ad un punto) la tangente ai due cerchi in C.

Osservazione. – Si presenta questo caso particolare quando uno degli angoli dati è supplementare di uno degli angoli del triangolo ABC (nel caso considerato γ è supplementare di $\widehat{ACB}$). I tre cerchi $(\alpha\alpha_1)$, $(\beta\beta_1)$, $(\gamma\gamma_1)$ si incontrano allora in un vertice di ABC ed uno di essi coincide col cerchio circoscritto al triangolo dato.

3. Se gli archi (α), (β), (γ) si costruiscono dalla parte del triangolo ABC le conclusioni non mutano e vale la stessa dimostrazione; infatti si presentano gli stessi casi considerati nel n. 2, eccettuato quello che il punto O, intersezione dei tre cerchi, sia interno al triangolo ABC, essendo ciò in evidente contradizione con l'ipotesi $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$.

Osservazioni. – Si ha il caso particolare che due dei cerchi siano tangenti in un vertice del triangolo ABC quando uno degli angoli dati è uguale ad uno degli angoli di ABC.

Se due degli angoli dati, e quindi necessariamente anche il terzo, sono eguali agli angoli del triangolo ABC, i tre cerchi $(\alpha\alpha_1)$, $(\beta\beta_1)$, $(\gamma\gamma_1)$ anzichè incontrarsi in un punto coincidono col cerchio circoscritto ad ABC ed il triangolo dei loro centri si riduce ad un punto (è il caso particolare n. 9 della Nota del prof. Bonferroni).

4. La dimostrazione che i tre cerchi $(\alpha\alpha_1)$, $(\beta\beta_1)$, $(\gamma\gamma_1)$ si incontrano in un punto ci permette di provare subito che il triangolo $C_\alpha C_\beta C_\gamma$, ottenuto congiungendo i loro centri, ha angoli eguali ad α, β, γ: infatti basta tener conto che la retta passante per i centri di due cerchi è perpendicolare alla congiungente i loro punti di intersezione e che angoli aventi i lati a due a due perpendicolari sono o uguali o supplementari.

Osservazione. – Costruiti due degli archi (α), (β), (γ), la proposizione che i tre cerchi $(\alpha\alpha_1)$, $(\beta\beta_1)$, $(\gamma\gamma_1)$ si incontrano in un punto (supposto $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$) suggerisce una costruzione immediata per ottenere il terzo arco.

Ad esempio C_γ si ottiene subito come intersezione delle perpendicolari condotte da C_α e C_β rispettivamente su OA e su OB (figg. 1, 2).

5. I punti di incontro dei cerchi $(\alpha\alpha_1)$, $(\beta\beta_1)$, $(\gamma\gamma_1)$ rappresentano i così detti *metapoli* del triangolo ABC nei riguardi degli angoli α, β, γ.

Quando per α, β, γ, anzichè tre angoli qualunque di somma 180°, si prendono gli angoli del triangolo ABC e gli archi (α), (β), (γ) si costruiscono dalla parte esterna di ABC, i cerchi $(\alpha\alpha_1)$, $(\beta\beta_1)$, $(\gamma\gamma_1)$ si possono incontrare in particolare nei così detti *punti di* Brocard: infatti ciò avviene effettivamente in due dei 3! modi in cui si possono associare gli archi (α), (β), (γ) con i lati del triangolo ABC [3].