

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

MODESTO DEDÒ

## Sul disegno dell'ombra delle superfici di rotazione

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 5*  
(1950), n.3-4, p. 363-367.

Zanichelli

<[http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1950\\_3\\_5\\_3-4\\_363\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_3-4_363_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



## Sul disegno dell'ombra delle superfici di rotazione.

Nota di MODESTO DEDÒ (a Milano).

*Sunto.* - Si deducono alcuni accorgimenti, utili nella pratica del disegno, dalla ovvia osservazione che l'ampiezza dell'arco che rimane in ombra, su ciascun parallelo di una superficie di rotazione, è funzione della inclinazione  $\omega$  che il piano tangente, in un punto del parallelo considerato, ha sull'asse di rotazione.

1. Tutte le trattazioni di applicazioni di geometria descrittiva, che ho avuto modo di consultare, insegnano a disegnare l'ombra (propria) di una superficie di rotazione mediante costruzioni le quali, pure essendo assai semplici dal punto di vista teorico, risultano alquanto ingombranti a chi debba eseguire effettivamente un disegno, dato il numero rilevante di linee accessorie che occorre costruire.

Una semplicissima circostanza, che non vedo abbia attratto l'attenzione dei trattatisti e che mi par degna di un certo rilievo anche dal punto di vista concettuale, permette di arrivare ad altre costruzioni, le quali dovrebbero risultare utili nella pratica dei disegnatori non solo perchè più semplici di quelle abituali, ma soprattutto perchè evitano di intralciare il disegno con costruzioni accessorie.

Quanto sto per esporre è certo molto ovvio e, forse, non risulterà a tutti nuovo. Ma la natura della sezione del « Bollettino » in cui è inserita questa noticina, mi pare ne giustifichi la pubbli-

(<sup>3</sup>) Per quanto riguarda i *metapoli* ed i *punti di BROCARD* si può vedere ad es.: E. ROUCHÉ et CH. DE COMBEROUSSE, *Traité de Géométrie*, Première Partie, Géométrie Plane. Gauthier-Villars, Paris 1912, rispettivamente pagg. 456-461 e pagg. 473-482.

cazione, che ha lo scopo di indicare un esempio di come sia spesso possibile portare una qualche semplificazione anche a procedimenti molto antichi e divenuti consuetudinari; questi procedimenti sono infatti abitualmente ripetuti — almeno da studenti e da tecnici — per molti anni, senza che neppure affiori l'ombra del dubbio che, esercitando il proprio spirito critico, si possa arrivare, con una certa facilità, a qualche utile perfezionamento: sia come risparmio di lavoro, sia come visione più profonda della vera natura delle questioni.

2. È a tutti ben noto che l'ombra propria di un cono di rotazione ha come contorno una coppia di generatrici del cono stesso, e appare a priori necessario che — supposti i raggi luminosi paralleli — l'ampiezza della zona d'ombra dipenda dall'angolo formato dai raggi luminosi con l'asse di rotazione del cono e dall'angolo di apertura del cono.

Volendo precisare questa dipendenza, indichiamo con  $\omega$  l'ampiezza del diedro sotto cui, dall'asse del cono, è vista la zona in ombra, con  $\alpha$  l'angolo formato dall'asse del cono con i raggi luminosi e con  $\varphi$  l'angolo formato dallo stesso asse con una generatrice: si trova subito che è

$$(1) \quad \cos \frac{1}{2} \omega = \frac{\tan \varphi}{\tan \alpha}.$$

Data ora una superficie di rotazione  $S$ , di asse  $a$ , pensiamola (come si fa d'abitudine) involuppata dai coni che la toccano secondo i vari paralleli; risulta allora chiara la seguente:

OSSERVAZIONE. — *Fissata la direzione dei raggi luminosi, l'ampiezza dell'arco che rimane in ombra su ciascun parallelo  $p$ , di una superficie di rotazione  $S$ , è funzione (soltanto) dell'inclinazione  $\varphi$  che il piano tangente in un punto del parallelo  $p$ , ha sull'asse di rotazione (1).*

(1) Accenniamo a come si possa verificare, anche analiticamente, il fatto enunciato. Sia  $z = f(t)$ , con  $t = x^2 + y^2$ , l'equazione della superficie  $S$  e siano  $l, m, n, 0$  le coordinate (omogenee) della sorgente luminosa  $L$ . Il contorno d'ombra è segnato sulla  $S$  dalla superficie  $S'$ , polare di  $L$ , di equazione

$$l \frac{\partial f}{\partial x} + m \frac{\partial f}{\partial y} = n$$

che si può anche scrivere, calcolando le derivate composte,

$$2 \frac{df}{dt} (lx + my) = n.$$

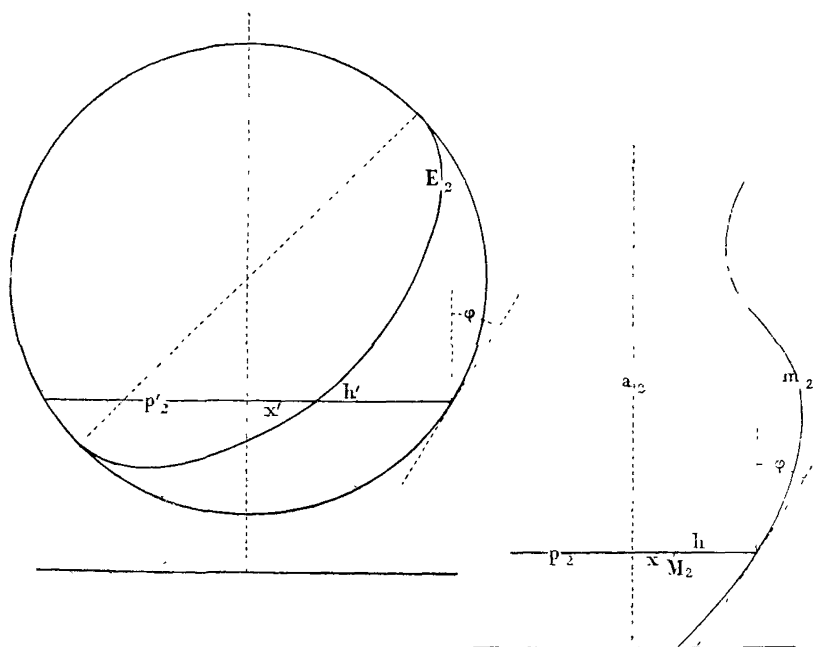
Da cui appare che i punti comuni ad  $S'$  e  $p$  dipendono (fissati  $l, m, n$ ) soltanto dalla  $\frac{df}{dt}$ .

3. Vediamo ora come si possa, in base all'osservazione precedente, procedere al disegno effettivo dell'ombra (propria) delle superficie di rotazione.

Ci riferiremo, per semplicità, al metodo delle proiezioni ortogonali e ci atterremo alla consuetudine di supporre che l'asse  $a$ , della superficie di rotazione  $S$ , sia perpendicolare al primo piano di proiezione  $e$ , inoltre, che « la luce sia a  $45^\circ$  ».

Siano  $a_2, m_2, p_2$  le seconde proiezioni rispettivamente dell'asse  $a$ , del meridiano principale  $m$  e di un generico parallelo  $p$ , il cui raggio indicheremo con  $h$ .

Ci proponiamo di segnare sulla seconda proiezione  $p_2$  del parallelo  $p$ , le seconde proiezioni  $M_2, N_2$  degli estremi dell'arco che rimane in ombra. I due punti  $M_2$  e  $N_2$  (che, inutile dirlo, non sa-



ranno sempre entrambi visibili: così in figura è visibile solo il punto  $M_2$  e non è neppure segnato il punto  $N_2$ ) sono individuati dalla loro distanza  $x$  dalla retta  $a_2$ .

D'accordo con l'osservazione precedente il rapporto  $\frac{x}{h}$  è determinato quando si conosca l'angolo  $\varphi$  formato dalla retta  $a_2$  con la tangente alla seconda proiezione  $m_2$  del meridiano principale, in un estremo del segmento  $p_2$ . Indicheremo, qui di seguito, due pro-

cedimenti per determinare effettivamente questo rapporto: il primo di natura grafica e il secondo di natura analitica. Non sarà difficile, in pratica, decidere quale dei due sia più conveniente allo scopo da raggiungere.

Naturalmente sono possibili altre semplificazioni, sui dettagli delle quali (costruzione di tabelle, nomogrammi ecc.) non possiamo indugiare, anche perchè dipendono dal gusto personale, in relazione alle svariate applicazioni.

*I Procedimento.* - Si assuma una sfera e si costruisca (una volta per tutte) la seconda proiezione,  $E_2$ , del contorno visibile della sua ombra propria: risulta ovviamente una mezza ellissi di immediata costruzione.

Osserviamo che la sfera è essa stessa una superficie di rotazione e che gli angoli di apertura dei coni ad essa circoscritti hanno ampiezze variabili da  $-\frac{\pi}{2}$  a  $+\frac{\pi}{2}$ . Sarà quindi sempre possibile trovare la seconda proiezione  $p_2'$  di un parallelo della sfera, cui competa il medesimo valore dell'angolo  $\varphi$  che compete al parallelo  $p$  della superficie  $S$  data. Misurando, sulla rappresentazione della sfera, il rapporto  $\frac{x'}{h'}$ , otterremo il valore del rapporto  $\frac{x}{h}$  richiesto; di qui risulterà immediato — soprattutto al tecnico che ha sempre a portata di mano il regolo calcolatore — ottenere il valore di  $x$ .

In pratica potrà convenire di preparare, come si è detto, il disegno relativo alla sfera; si potrà poi portare le due linee di terra ad essere parallele, così che l'estremo del segmento  $p_2'$  sarà immediatamente individuato con l'abituale uso di riga e squadra. Ma, come già detto, non vogliamo insistere su questi accorgimenti; limitiamoci ad osservare che il procedimento è pure valido nel caso in cui la superficie data sia altrimenti rappresentata, sia per la posizione, sia per il metodo di rappresentazione (1).

*II Procedimento.* - Nel caso, in cui ci siamo posti, della luce a  $45^\circ$ , si trova subito la relazione

$$(2) \quad \frac{x}{h} = \cos \left( 45^\circ \pm \frac{\omega}{2} \right)$$

dalla quale, per la (1), si ricava

$$(3) \quad \frac{x}{h} = \frac{\text{tang } \varphi \pm \sqrt{2 - \text{tang}^2 \varphi}}{2}$$

(1) E soprattutto in questi casi che risultano più evidenti i vantaggi del metodo qui esposto.

e, più precisamente,

$$(4) \quad \frac{x}{h} = \frac{\operatorname{tang} \varphi + \sqrt{2 - \operatorname{tang}^2 \varphi}}{2} \quad \text{per } -45^\circ < \varphi < +45^\circ$$

$$(5) \quad \frac{x}{h} = \frac{\operatorname{tang} \varphi \pm \sqrt{2 - \operatorname{tang}^2 \varphi}}{2} \quad \text{per } -\operatorname{arctg} \sqrt{2} < \varphi < -45^\circ.$$

Mediante queste formole (4) e (5) — che, ove sia il caso, potranno essere tabulate, o trasformate in nomogramma (di cui sostanzialmente è un esempio quello, già dato precedentemente, di rappresentare l'ombra della sfera) o anche ridotte a regolo calcolatore — si può quindi calcolare il valore di  $x$  relativo ad un conveniente numero di paralleli e si ha una costruzione per punti dell'ombra propria della superficie richiesta.

---