JAURÈS CECCONI

Un esempio nella teoria delle trasformazioni piane.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **6** (1951), n.1, p. 18–21.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_1_18_0>

Un esempio nella teoria delle trasformazioni piane.

Nota di JAURÈS CECCONI (a Pisa).

Sunto. - *Si dà un esempio di due trasformazioni piane continue a variazione limitata, aventi lo stesso contorno, per le quali le funzioni caratteristiche di molteplicità relativa differiscono in un insieme di misura piana positiva.*

Sia A il quadrato unitario $0 \leq {u \atop v} \leq 1$ del piano uv e sia

$$T: \quad x = x(u, v), \qquad y = y(u, v) \qquad\qquad (u, v) \varepsilon A$$

una trasformazione piana ivi definita.

Se T è a variazione limitata (B. V.) può considerarsi [L. CESARI [1]] la « funzione caratteristica di molteplicità relativa » $n(x, y; T)$ della trasformazione T, la quale ha una naturale applicazione nella formula di trasformazione degli integrali doppi [1].

Una analoga funzione di molteplicità relativa, $\nu(x, y; T)$, è stata introdotta, allo stesso scopo, da T. RADÒ [3], e le funzioni $n(x, y; T)$, $\nu(x, y; T)$; come ho fatto vedere in un precedente lavoro [2]; coincidono quasi ovunque nel piano xy nella ipotesi che T sia assolutamente continua (A. C.).

La funzione $n(x, y; T)$ gode, fra l'altro, della proprietà espressa dal seguente

TEOREMA [L. CESARI [1]]. — Se T è B. V. in A e se C è l'immagine del contorno di A secondo T allora per quasi ogni punto del piano xy che non appartenga a C si ha

$$n(x, y; T) = 0(x, y; C)$$

essendo $0(x, y; C)$ l'indice topologico del punto (x, y) rispetto a C.

Da questo teorema segue in particolare che se C occupa nel piano xy un insieme di misura piana nulla allora è quasi ovunque nel piano xy,

$$n(x, y; T) = 0(x, y; C).$$

Ne segue anche che se C è di misura piana nulla e se T_1 e T_2 sono due trasformazioni piane continue aventi C per contorno è quasi ovunque nel piano xy

$$n(x, y; T_1) = n(x, y; T_2).$$

Nessuna informazione si ha invece, per quanto è a mia conoscenza, sul caso in cui C occupi un insieme di misura piana positiva.

Mi propongo in questa nota di dare un esempio di due trasformazioni piane T_1 e T_2 aventi lo stesso contorno C per le quali è $n(x, y; T_1) \neq n(x, y; T_2)$ in un insieme di misura positiva.

Sia A il quadrato, sopra considerato, del piano uv e siano A_1, A_2, A_3, A_4 i quattro triangoli di vertici rispettivi [(0, 0), (1, 0), (1/2, 1/2)]; [(1, 0), (1, 1), (1/2, 1/2)]; [(1, 1), (0, 1), (1/2, 1/2)]; [(0, 1), (0, 0), (1/2, 1/2)]; in cui A è diviso dalle diagonali.

Considero la seguente linea C immagine del contorno di A.

L'immagine del lato $0 \leq u \leq 1$, $v = 0$ è il segmento $x = u$, $y = 0$, $0 \leq u \leq 1$.

L'immagine del lato $u = 1$, $0 \leq v \leq 1$ è il segmento $x = 1$, $y = v$, $0 \leq v \leq 1$.

L'immagine del lato $0 \leq u \leq 1$, $v = 1$ è una curva continua

$$\Gamma: \quad x = \varphi(u), \qquad y = \psi(u) \qquad\qquad 0 \leq u \leq 1$$

semplice aperta che occupa un insieme di misura positiva, tale che sia $[\varphi(1), \psi(1)] \equiv (1, 1)$, $[\varphi(0), \psi(0)] \equiv (3/4, 1/4)$ e tale inoltre che i punti di Γ appartengano ad un rombo di vertici opposti (1, 1), (3/4, 1/4) ed interno al triangolo di vertici (1, 1), (1/2, 1/2), (7/8, 1/8) del piano xy.

L'immagine del lato $u = 0$, $0 \leq v \leq 1$ è il segmento $x = \frac{3}{4} v$, $y = \frac{1}{4} v$, $0 \leq v \leq 1$.

Definisco T_1 nel seguente modo.

Se $(u, v) \varepsilon A_1$ pongo T_1: $x = u$, $y = v$.

Se $(u, v) \varepsilon A_2$ pongo T_1: $x = u$, $y = v$.

Per definire T in A_3 considero intanto la trasformazione lineare del segmento di estremi (1/2, 1/2), (0, 1) del piano uv nel segmento di estremi (1/2, 1/2), (3/4, 1/4) del piano xy, e la trasformazione lineare del segmento di estremi (1/2, 1/2). (1, 1) del piano uv nel segmento di estremi (1/2, 1/12), (1, 1) del piano xy.

In tal modo mediante, anche, la trasformazione sopra definita del segmento di estremi (0, 1), (1, 1) del piano uv nella linea Γ del piano xy, risulta definita una trasformazione biunivoca e bicontinua del contorno del triangolo A_3 del piano uv nella linea semplice chiusa, sia essa C_1, formata da Γ e dai segmenti di estremi rispettivamente (1, 1), (1/2, 1/2); (1/2, 1/2), (3/4, 1/4).

In virtù di un noto teorema di SCHOENFLIES [6] ne discende allora la possibilità di prolungare questa corrispondenza biunivoca e bicontinua fino ad un omeomorfismo degli interni di A_3 e di C_1 che si riduce al dato fra il contorno di A_3 e C_1.

Sia

$$T_1: \quad x = x_1(u, v), \qquad y = y_1(u, v) \qquad\qquad (u, v) \varepsilon A_3$$

questa trasformazione.

Definisco infine T_1 in A_4 in modo che essa sia lineare e faccia corrispondere ai punti $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1/2, 1/2)$ del piano uv i punti $(0, 0)$, $(3/4, 1/4)$, $(1/2, 1/2)$ del piano xy rispettivamente.

Per il modo come è definita T_1 risulta continua in A.

Essa risulta altresì a variazione limitata poichè la funzione caratteristica di molteplicità assoluta $k(x, y; T_1)$ risulta sommabile nel quadrato $0 \leq {x \atop y} \leq 1$ del piano xy.

Ciò si vede immediatamente ricordando che, secondo *T.* RADÒ [3], $k(x, y; T_1)$ da il numero degli e. m. m. c. [3] di (x, y) secondo T_1 in A.

Tale numero è minore od uguale al numero degli m. m. c. [3] di (x, y) secondo T_1 in A ed è perciò ≤ 2.

È inoltre in virtù di un teorema di P. V. REICHELDERFER [5] e di un mio risultato [2]

$$n(x, y; T_1) = k^+(x, y; T_1) - k^-(x, y; T_1)$$

essendo $k^+(x, y; T_1)$ $[k^-(x, y; T_1)]$ il numero degli e. m. m. c. γ di (x, y) secondo T_1 in A ognuno dei quali ha la proprietà che in ogni insieme aperto O contenente γ esiste una regione di JORDAN R di connessione finita tale che $\gamma \subset R^0$, $R \subset O \cdot A$, $O(x, y; R^0) > 0$ $[O(x, y; R^0) < 0]$.

Ne viene perciò che in ogni punto $(x, y) \varepsilon \Gamma$ si ha

$$n(x, y; T_1) = 1.$$

Passo ora a definire la trasformazione T_2.

Se $(u, v) \varepsilon A_1$

$$T_2: \quad x = x_2(u, v), \qquad y = y_2(u, v) \qquad\qquad (u, v) \varepsilon A_1$$

è la trasformazione lineare che fa corrispondere ai punti $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1/2, 1/2)$ del piano uv rispettivamente i punti $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(7/8, 1/8)$ del piano xy.

Se $(u, v) \varepsilon A_2$

$$T_2: \quad x = x_2(u, v), \qquad y = y_2(u, v) \qquad\qquad (u, v) \varepsilon A_2$$

è la trasformazione lineare che fa corrispondere ai punti $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(1/2, 1/2)$ del piano uv i punti $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(7/8, 1/8)$ del piano xy.

Per definire T_2 quando $(u, v) \varepsilon A_3$ considero intanto la trasformazione lineare del segmento di estremi $(1, 1)$; $(1/2, 1/2)$ del piano uv nel segmento di estremi $(1, 1)$, $(7/8, 1/8)$ del piano xy e la trasformazione lineare del segmento di estremi (0, 1), (1/2, 1/2) del piano uv nel segmento di estremi (3/4, 1/4) (7/8, 1/8) del piano xy.

Tenendo anche conto della trasformazione, sopra definita, del segmento di estremi (0, 1) (1, 1) del piano uv, nella curva Γ del piano xy, vengo così ad avere definita una trasformazione biunivoca e bicontinua del contorno del triangolo A_3 nella linea semplice chiusa C_2, del piano xy, costituita dalla linea Γ e dai segmenti di estremi (3/4, 1/4), (7/8, 1/8); (7/8, 1/8), (1, 1).

In virtù del sopra citato teorema di SCHOENFLIES è possibile estendere tale trasformazione biunivoca e bicontinua ad un omeomorfismo degli interni di A_3 e di C_2, che si riduce al dato sul contorno di A_3 e su C_2.

Sia

$$T_2: \quad x = x_2(u, v), \qquad y = y_2(u, v) \qquad\qquad (u, v) \varepsilon A_3$$

questa trasformazione.

Definisco infine T_2 in A_4, come quella trasformazione lineare

$$T_2: \quad x = x_2(u, v), \qquad y = y_2(u, v) \qquad\qquad (u, v) \varepsilon A_4$$

che fa corrispondere ai punti (0, 0), (0, 1), (1/2, 1/2) del piano uv rispettivamente i punti (0, 0), (3/4, 1/4), (7/8, 1/8) del piano xy.

La trasformazione T_2 che risulta così definita è continua.

Con lo stesso ragionamento di sopra si riconosce che in ogni punto del quadrato $0 \leq \frac{x}{y} \leq 1$ è

$$k(x, y; T_2) \leq 1,$$

essa risulta perciò a variazione limitata.

Con il medesimo ragionamento di sopra si riconosce anche che in ogni punto di Γ è

$$n(x, y; T_2) = 0.$$

Poichè T_1 e T_2 hanno il medesimo contorno il nostro asserto è provato.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. CESARI, *Sulla trasformazione degli integrali doppi*, « Ann. Mat. Pura Appl. », (4), 27, 321-374 (1948).

[2] J. CECCONI, *Su le funzioni caratteristiche e gli Jacobiani generalizzati*, Nota I° e II°, « Riv. Mat. Univer. Parma », 1, 229-235 (1950).

[3] T. RADÒ, *Length and area*, « Amer. Math. Soc. Colloquium Publications », vol. XXX.

[4] T. RADÒ, *Two-dimensional concepts of bounded variation and absolute continuity*, « Duke Math. Jour. », 14, 587-608 (1947).

[5] P. V. REICHELDERFER, *Law of transformation for generalized Jacobians*, « Duke Math. Jour. », 16, 73-83 (1949).

[6] A. SCHOENFLIES, *Beiträge zur Theorie der Punktmengen*, III°, « Math. Ann. », 62, 286-328 (1906).