Bollettino Unione Matematica Italiana

Carlo Pucci

Serie di funzioni a variazione limitata.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **6** (1951), n.1, p. 1–3.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_1_1_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1951.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Serie di funzioni a variazione limitata.

Nota di CARLO PUCCI (a Firenze).

Sunto. - *Si prova che la convergenza di tre serie a termini costanti assicura l'uniforme convergenza in un intervallo e la derivabilità termine a termine quasi ovunque di una serie di funzioni a variazione limitata.*

a) In relazione a una nota precedente ([1]) diamo il seguente teorema:

Le funzioni $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, *definite in un intervallo* (a, b), *siano ivi a variazione limitata, e sia* $P_n(x)$, $N_n(x)$, $V_n(x)$ *la variazione positiva, negativa, totale di* $f_n(x)$ *in* (a, x) *per* $x \subset (a, b)$. *Se risultano convergenti le serie a termini costanti* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(b)$ *ed una delle tre seguenti:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n(b), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} N_n(b), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} V_n(b), \tag{1}$$

allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *è uniformemente convergente in* (a, b) *verso una funzione a variazione limitata, ed inoltre, posto*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \tag{2}$$

è quasi ovunque in (a, b)

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x),$$

([1]) C. PUCCI, *Derivazione per serie di funzioni a variazione limitata*, Boll. Un. Mat. It. », (3), 5 (1950), pp. 281-286.

cioè la serie (2) *è generalmente derivabile termine a termine.*

Ricordando le note relazioni delle funzioni a variazione limitata

$$f_n(x) = f_n(a) + P_n(x) - N_n(x), \tag{3}$$

$$P_n(x) + N_n(x) = V_n(x), \tag{4}$$

proviamo dapprima che se converge una delle tre serie (1) convergono nelle nostre ipotesi anche le altre due.

Se è convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(b)$ è pure convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} N_n(b)$ perchè per la (3) è

$$\sum_{n=1}^{\infty} N_n(b) = \sum_{n=1}^{\infty} [f_n(a) + P_n(b) - f_n(b)] = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(b) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(b),$$

ed è pure convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} V_n(b)$ perchè per la (4) è somma di serie convergenti.

Se è convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} N_n(b)$ analogamente si prova la convergenza delle serie $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(b)$, $\sum_{n=1}^{\infty} V_n(b)$.

Se è convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} V_n(b)$ anche le serie $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(b)$, $\sum_{n=1}^{\infty} N_n(b)$ sono convergenti perchè per la (4) sono minoranti della serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} V_n(b)$.

Essendosi provata la convergenza delle serie (1) ne consegue l'uniforme convergenza in (a, b) delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} N_n(x), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x), \tag{5}$$

essendo per $x \subset (a, b)$

$$P_n(x) \leq P_n(b), \qquad N_n(x) \leq N_n(b), \qquad V_n(x) \leq V_n(b).$$

Quale somma di serie uniformemente convergenti in (a, b) è pure uniformente convergente in tale intervallo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [f_n(a) + P_n(x) - N_n(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} N_n(x)$$

Risulta quindi definita dalla (2) la funzione $f(x)$ che è a variazione limitata in (a, b) perchè $f(x) - f(a)$ è differenza di due funzioni non decrescenti:

$$f(x) - f(a) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} N_n(x).$$

Essendosi provata la convergenza della serie data a una funzione a variazione limitata in (a, b) e la convergenza delle serie (5), $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ è derivabile termine a termine quasi ovunque in (a, b) per un teorema di derivazione per serie dimostrato in una precedente nota [2].

b) È evidente che qualora non si verifichi la convergenza di una delle serie (1) il teorema può non sussistere.

Si consideri ad esempio la serie di funzioni a variazione limitata in $(0, \pi)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n!\,x)}{n!}. \tag{6}$$

Essa è uniformemente convergente in $(0, \pi)$ ed i suoi termini hanno variazione positiva uguale ad 1 in tale intervallo. Non è quindi convergente la serie delle variazioni positive e la serie

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(n!\,x),$$

ottenuta dalla (6) derivandola termine a termine, non è convergente quasi ovunque in $(0, \pi)$ (cfr. ad es. L. TONELLI, *Serie trigonometriche*, pp. 16-17, Bologna 1928).